

**Н. В. ГУЦКО<sup>1</sup>, Ю. В. ГОРБАТОВА<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

<sup>2</sup>БГУ им. акад. И.Г. Петровского (г. Брянск, Россия)

### **О СТРОЕНИИ ГРУПП ШМИДТА С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ВТОРЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ**

На протяжении многих лет развития теории конечных групп авторы обращались к вопросу влияния свойств  $i$ -ых максимальных подгрупп (при фиксированном  $i$ ) на строение группы, что привело к появлению большого числа публикаций в направлении развития теории обобщенно максимальных подгрупп конечных групп.

Напомним, что подгруппа  $H$  группы  $G$  называется *2-максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы  $G$ , если  $H$  является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе  $M$  группы  $G$ . Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее.

Связь между 2-максимальными подгруппами группы  $G$  и структурой группы  $G$  исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранние результаты в данном направлении получили Редери [1], описавший неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Хупперт [2], установивший сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы нормальны. Эти результаты стимулировали многие другие исследования в данном направлении. Например, в работах Судзуки [3] и Янко [4] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все вторые максимальные подгруппы являются нильпотентными, было получено В.А. Белоноговым в работе [5].

Отмеченные выше результаты Редди и Хупперта получили свое дальнейшее развитие в работе Агравала [6], где доказано, что группа  $G$  является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы  $S$ -квазинормальны (подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $S$ -квазинормальной в  $G$ , если  $H$  перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы  $G$ ), а также в работе Л.Я. Полякова [7], который доказал, что группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами. В дальнейшем в работе [8] было получено полное описание групп, у которых каждая вторая максимальная подгруппа перестановочна со всеми первыми максимальными подгруппами.

В настоящее время теория обобщенно максимальных подгрупп является весьма развитым учением, обогащенным большим числом глубоких теорем и содержательных примеров. Вместе с тем имеется и ряд открытых задач в данном направлении. В данной работе приводится теорема, описывающая строение групп Шмидта, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой.

**Теорема.** Пусть  $G=[P]Q$  – группа Шмидта, где  $P$  и  $Q$  – силовские  $p$ -подгруппа и  $q$ -подгруппа группы  $G$  соответственно. В том и только в том случае в группе  $G$  каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 4-максимальными подгруппами из  $G$ , когда либо  $|G|=p^\alpha q^\beta$  для  $\alpha+\beta\leq 4$ , либо  $G$  является группой одного из следующих типов:

- (1)  $G$  – группа с абелевыми силовскими подгруппами;
- (2)  $G=[P]Q$ , где  $|Q|=q^2$ ,  $|\Phi(P)|\leq p^2$  и  $\Phi(P)$  – единственная 2-максимальная подгруппа в  $P$ ;
- (3)  $G=[P]Q$ , где  $|Q|=q$ ,  $|\Phi(P)|\leq p^2$  и  $P_3\subseteq\Phi(P)$  для каждой 3-максимальной подгруппы  $P_3$  из  $P$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R`edei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. R`edei // Acta Math. – 1950. – Т. 84. – S. 129–153.
2. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
3. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, N 4. – P. 686–695.
4. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.
5. Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.
6. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.
7. Поляков, Л.Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 75–88.
8. Легчекова, Е.В. Конечные группы с частично перестановочными вторыми и третьими максимальными подгруппами / Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 3. – С. 27–29.