Е. ОВСИЮК[1], О. ВЕКО[1], М. НЕАГУ[2], В. БАЛАН[3], В. РЕДЬКОВ[4]
[1]МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)
[2]Трансильванский университет (г. Брашов, Румыния)
[3]Бухарестский политехнический университет (г. Бухарест, Румыния)
[4]Институт физики им. Б.И. Степанова (г. Минск, Беларусь)

О ВЫДЕЛЕНИИ МАТРИЦ МЮЛЛЕРА-ЛОРЕНЦА ИЗ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ *SL*(4, *R*) И ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИХ В ДИРАКОВСКОМ БАЗИСЕ

Многие свойства группы Лоренца [1]–[4] оказываются полезными в поляризационной оптике (см. [5]–[10] и приведенную там литературу). Ниже рассмотрим некоторые новые применения теории этой группы в оптике. Исходим из факторизованного представления произвольной матрицы Лоренца [1], [3]

$$[\, L_b^{\ a}(q,\bar{q}^*)\,] = A(q)A^*(q)\,, \tag{1}$$

$$A(q) = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ -q_1 & q_0 & -iq_3 & iq_2 \\ -q_2 & iq_3 & q_0 & -iq_1 \\ -q_3 & -iq_2 & iq_1 & q_0 \end{pmatrix}, \qquad A^*(q) = \begin{pmatrix} q_0^* & -q_1^* & -q_2^* & -q_3^* \\ -q_1^* & q_0^* & iq_3^* & -iq_2^* \\ -q_2^* & -iq_3^* & q_0^* & iq_1^* \\ -q_3^* & iq_2^* & -iq_1^* & q_0^* \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ниже нам потребуется представление для произвольного преобразования из группы Лоренца в блочной форме:

$$L = \begin{pmatrix} K & N \\ L & M \end{pmatrix};$$

(K)

$$L_{00} = (q_0\, q_0^* + q_1\, q_1^*) + (q_2\, q_2^* + q_3\, q_3^*), \qquad L_{01} = -(q_0\, q_1^* + q_1\, q_0^*) + i\,(q_2\, q_3^* - q_3\, q_2^*),$$
$$L_{10} = -(q_0\, q_1^* + q_1\, q_0^*) - i\,(q_2\, q_3^* - q_3\, q_2^*), \qquad L_{11} = (q_0\, q_0^* + q_1\, q_1^*) - (q_2\, q_2^* + q_3\, q_3^*);$$

(M)

$$L_{22} = (q_0\, q_0^* - q_1\, q_1^*) + (q_2\, q_2^* - q_3\, q_3^*), \qquad L_{23} = i\,(q_0\, q_1^* - q_1\, q_0^*) + (q_2\, q_3^* + q_3\, q_2^*),$$
$$L_{32} = -i\,(q_0\, q_1^* - q_1\, q_0^*) + (q_2\, q_3^* + q_3\, q_2^*), \qquad L_{33} = (q_0\, q_0^* - q_1\, q_1^*) - (q_2\, q_2^* - q_3\, q_3^*);$$

(N)

$$L_{02} = -(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) - i\,(q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*), \qquad L_{03} = -(q_0\, q_3^* + q_3\, q_0^*) + i\,(q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*),$$
$$L_{12} = i\,(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^*) + (q_1\, q_2^* + q_2\, q_1^*), \qquad L_{13} = -i\,(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) + (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*);$$

(L)

$$L_{20} = -(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) + i\,(q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*), \qquad L_{21} = -i\,(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^*) + (q_1\, q_2^* + q_2\, q_1^*),$$
$$L_{30} = -(q_0\, q_3^* + q_3\, q_0^*) - i\,(q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*), \qquad L_{31} = i\,(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) + (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*).$$

Матрицы Мюллера лоренцевского типа $M = L$ образуют вещественную подгруппу в линейной группе $SL(4,R)$:

$$G = \begin{pmatrix} k_0 + \mathbf{k}\,\vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n}\,\vec{\sigma} \\ l_0 + \mathbf{l}\,\vec{\sigma} & m_0 + \mathbf{m}\,\vec{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $k_0 \equiv k_0 I_2$ и $\sigma_0 = I_2$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ и $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Рассматривая матрицы Мюллера–Лоренца как составленные из четырех блоков

$$L(q,q^*) = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 - ik_2 & n_0 + n_3 & n_1 - in_2 \\ k_1 + ik_2 & k_0 - k_3 & n_1 + in_2 & n_0 - n_3 \\ l_0 + l_3 & l_1 - il_2 & m_0 + m_3 & m_1 - im_2 \\ l_1 + il_2 & l_0 - l_3 & m_1 + im_2 & m_0 - m_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} K & N \\ L & M \end{pmatrix}, \tag{4}$$

можно найти коэффициенты $k,\ m,\ n,\ l$, соответствующие матрице $L(q,q^*)$. При этом удобно выполнить простую замену:

$$k_2 \Rightarrow ik_2, \qquad m_2 \Rightarrow im_2, \qquad n_2 \Rightarrow in_2, \qquad l_2 \Rightarrow il_2 .$$

В результате находим явный вид 16 вещественных коэффициентов:

$$\begin{gathered}
k_0 = q_0\, q_0^* + q_1\, q_1^* , \qquad k_1 = -(q_0\, q_1^* + q_1\, q_0^*), \\
k_2 = i\,(q_2\, q_3^* - q_3\, q_2^*), \qquad k_3 = q_2\, q_2^* + q_3\, q_3^* , \\
m_0 = q_0\, q_0^* - q_1\, q_1^* , \qquad m_1 = q_2\, q_3^* + q_3\, q_2^* , \\
m_2 = i\,(q_0\, q_1^* - q_1\, q_0^*), \quad m_3 = -q_2\, q_2^* - q_3\, q_3^* , \\
2\,l_0 = -(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) + i\,(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) + i\,(q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*) + (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*), \\
2\,l_3 = -(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) - i\,(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) + i\,(q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*) - (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*), \\
2\,l_1 = -i\,(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^*) - (q_0\, q_3^* + q_3\, q_0^*) + (q_1\, q_2^* + q_2\, q_1^*) - i\,(q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*), \\
2\,l_2 = -i\,(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^*) + (q_0\, q_3^* + q_3\, q_0^*) + (q_1\, q_2^* + q_2\, q_1^*) + i\,(q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*), \\
2n_0 = -(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) - i\,(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) - i\,(q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*) + (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*), \\
2n_3 = -(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) + i\,(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) - i\,(q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*) - (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*), \\
2n_1 = -(q_0\, q_3^* + q_3\, q_0^*) + i\,(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^*) + i\,(q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*) + (q_1\, q_2^* + q_2\, q_1^*) , \\
2n_2 = -(q_0\, q_3^* + q_3\, q_0^*) - i\,(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^*) + i\,(q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*) - (q_1\, q_2^* + q_2\, q_1^*) .
\end{gathered} \tag{5}$$

Разложим произвольную матрицу из группы Лоренца по 16-мерному базису матриц Дирака

$$L(q,q^*) = Z + \gamma^5\, \tilde{Z} + \gamma^l\, Z_l + \gamma^l \gamma^5\, \tilde{Z}_l + \sigma^{mn}\, Z_{mn} , \tag{6}$$

где 16 коэффициентов задаются формулами:

$$\begin{gathered}
Z = \frac{1}{4} \operatorname{Sp} L(q,q^*) , \qquad \tilde{Z} = \frac{1}{4} \operatorname{Sp} \gamma^5 L(q,q^*) , \\
Z_k = \frac{1}{4} \operatorname{Sp} \gamma_k L(q,q^*) , \qquad \tilde{Z}_k = \frac{1}{4} \operatorname{Sp} \gamma^5 \gamma_k L(q,q^*) , \qquad Z_{kl} = -\frac{1}{2} \operatorname{Sp} \sigma_{kl} L(q,q^*) .
\end{gathered} \tag{7}$$

После простых вычислений приходим к равенствам:

$$\begin{gathered}
Z = q_0\, q_0^* , \qquad \tilde{Z} = q_1\, q_1^* , \qquad Z_{03} = q_3\, q_3^* , \qquad -iZ_{12} = q_2\, q_2^* , \\
Z_{01} = -\frac{1}{2}[(q_0\, q_1^* + q_1\, q_0^*) + (q_2\, q_3^* + q_3\, q_2^*)], \qquad Z_{23} = \frac{i}{2}[-(q_0\, q_1^* + q_1\, q_0^*) + (q_2\, q_3^* + q_3\, q_2^*)] , \\
Z_{02} = \frac{1}{2}[(q_0\, q_1^* - q_1\, q_0^*) - (q_2\, q_3^* - q_3\, q_2^*)], \qquad Z_{31} = \frac{i}{2}[-(q_0\, q_1^* - q_1\, q_0^*) - (q_2\, q_3^* - q_3\, q_2^*)] , \\
Z_0 = \frac{1}{2}[-(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) + (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*)], \qquad \tilde{Z}_0 = \frac{i}{2}[+(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) + (q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*)], \\
Z_3 = -\frac{i}{2}[(q_0\, q_2^* - q_2\, q_0^*) - (q_1\, q_3^* - q_3\, q_1^*)], \qquad \tilde{Z}_3 = -\frac{1}{2}[(q_0\, q_2^* + q_2\, q_0^*) + (q_1\, q_3^* + q_3\, q_1^*)], \\
Z_1 = -\frac{i}{2}(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^* + q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*), \qquad \tilde{Z}_1 = -\frac{1}{2}[(q_0\, q_3^* + q_3\, q_0^*) - (q_1\, q_2^* + q_2\, q_1^*)], \\
Z_2 = -\frac{i}{2}(-q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^* - q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*), \qquad \tilde{Z}_2 = -\frac{1}{2}[-(q_0\, q_3^* - q_3\, q_0^*) + (q_1\, q_2^* - q_2\, q_1^*)].
\end{gathered}$$

На основе этих соотношений можно развить еще один способ нахождения параметров q_a через найденные коэффициенты (7). Так, замечаем

$$Z = q_0\, q_0^* , \qquad \tilde{Z} = q_1\, q_1^* , \qquad Z_{03} = q_3\, q_3^* , \qquad -iZ_{12} = q_2\, q_2^* ; \tag{8}$$

затем

$$\begin{gathered}
Z_{01} + iZ_{23} = -q_2 q_3^* - q_2^* q_3 , \qquad Z_{01} - iZ_{23} = -q_0 q_1^* - q_0^* q_1 , \\
Z_{02} + iZ_{31} = q_0 q_1^* - q_0^* q_1 , \qquad Z_{02} - iZ_{31} = -q_2 q_3^* + q_2^* q_3 ,
\end{gathered}$$

т. е.

$$(Z_{01} - iZ_{23}) + (Z_{02} + iZ_{31}) = -2\, q_0^* q_1 ,$$

$$(Z_{01} - iZ_{23}) - (Z_{02} + iZ_{31}) = -2\, q_0 q_1^* \,,$$
$$(Z_{01} + iZ_{23}) + (Z_{02} - iZ_{31}) = -2\, q_2 q_3^* \,,$$
$$Z_{01} + iZ_{23}) - (Z_{02} - iZ_{31}) = -2\, q_2^* q_3 \,; \tag{9}$$

затем

$$Z_0 - \tilde{Z}_3 = (q_1 q_3^* + q_1^* q_3)\,, \qquad Z_0 + \tilde{Z}_3 = -(q_0 q_2^* + q_0^* q_2)\,,$$
$$\tilde{Z}_0 - Z_3 = i(q_0 q_2^* - q_0^* q_2)\,, \qquad \tilde{Z}_0 + Z_3 = i(q_1 q_3^* - q_1^* q_3)\,,$$

т. е.

$$(Z_0 - \tilde{Z}_3) + i(\tilde{Z}_0 + Z_3) = 2\, q_1^* q_3 \,,$$
$$(Z_0 - \tilde{Z}_3) - i(\tilde{Z}_0 + Z_3) = 2\, q_1 q_3^* \,,$$
$$(Z_0 + \tilde{Z}_3) + i(\tilde{Z}_0 - Z_3) = -2\, q_0 q_2^* \,,$$
$$(Z_0 + \tilde{Z}_3) - i(\tilde{Z}_0 - Z_3) = -2\, q_0^* q_2 \,; \tag{10}$$

и затем

$$Z_1 + i\tilde{Z}_2 = -i(q_1 q_2^* - q_1^* q_2)\,, \qquad Z_1 - i\tilde{Z}_2 = -i(q_0 q_3^* - q_0^* q_3)\,,$$
$$\tilde{Z}_1 + iZ_2 == q_0 q_3^* - q_0^* q_3 \,, \qquad \tilde{Z}_1 - iZ_2 = q_1 q_2^* + q_1^* q_2 \,,$$

т. е.

$$(Z_1 + i\tilde{Z}_2) + i(\tilde{Z}_1 - iZ_2) = +2i\, q_1^* q_2 \,,$$
$$(Z_1 + i\tilde{Z}_2) - i(\tilde{Z}_1 - iZ_2) = -2i\, q_1 q_2^* \,,$$
$$(Z_1 - i\tilde{Z}_2) + i(\tilde{Z}_1 + iZ_2) = -2i\, q_0 q_3^* \,,$$
$$(Z_1 - i\tilde{Z}_2) - i(\tilde{Z}_1 + iZ_2) = +2i\, q_0^* q_3 \,. \tag{11}$$

Полученные соотношения позволяют найти параметры лоренцевских матриц. В самом деле, учтем равенства:

$$Z = q_0\, q_0^*, \qquad q_0 = \sqrt{Z} e^{i\alpha} \,,$$
$$q_1 = -\frac{1}{2\, q_0^*}\, [(Z_{01} - iZ_{23}) + (Z_{02} + iZ_{31})] = \frac{1}{q_0^*} M_1 \,,$$
$$q_2 = -\frac{1}{2\, q_0^*}\, [(Z_0 + \tilde{Z}_3) - i(\tilde{Z}_0 - Z_3)] = \frac{1}{q_0^*} M_2 \,,$$
$$q_3 = -i \frac{1}{2\, q_0^*}\, [(Z_1 - i\tilde{Z}_2) - i(\tilde{Z}_1 + iZ_2)] = \frac{1}{q_0^*} M_3 \,. \tag{12}$$

С использованием квадратичного дополнительного условия $q_0^2 - \mathbf{q}^2 = 1$ получаем

$$e^{i\alpha} = \pm\sqrt{\frac{Z}{Z^2 - \mathbf{M}^2}}, \qquad q_0 = \sqrt{Z} e^{i\alpha} \,, \qquad q_j = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{Z}} M_j \,. \tag{13}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца. Ф.И. Федоров. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

2. Березин, А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск: Наука и техника, 1989. – 211 с.

3. Bogush, A.A. On unique parametrization of the linear group $GL(4,C)$ and its subgroups by using the Dirac algebra basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.

4. Red'kov, V.M. Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.

6. Овсиюк, Е.М. Транзитивность в теории группы трехмерных вращений и формализм Стокса–Мюллера в поляризационной оптике / Е.М. Овсиюк // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 1 (37). – С. 69–75.

7. Овсиюк, Е.М. Полугруппы Мюллера ранга 1 и 2 / Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 34–40.

8. Редьков, В.М. Транзитивность в теории группы Лоренца и формализм Стокса–Мюллера в поляризационной оптике / В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 18–23.
9. Ovsiyuk, E.M. Degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics / E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // XLVIII All-Russia conference on problems in Particle Physics, Plasma Physics, Condensed Matter, and Optoelectronics; Russia, Moscow, 15-18 May 2012; Vestnik RUDN. – 2013. – 15 pages.
10. Овсиюк, Е.М. Возможна ли финслерова геометризация поляризационной оптики / Е.М. Овсиюк, В.М. Редьков // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2012. – Т. 9, № 1 (17). – С. 1–56.