О. В. ВЕКО[1], Е. М. ОВСИЮК[1], В. М. РЕДЬКОВ[2]
[1]МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)
[2]Институт физики им. Б.И. Степанова (г. Минск, Беларусь)

О 4-СПИНОРАХ ДЖОНСА ЧАСТИЧНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

Для аналитического описания состояния поляризации света используются 4 параметра Стокса [1]. При любом линейном оптическом процессе параметры Стокса падающего пучка линейно преобразуются в параметры Стокса вышедшего пучка с помощью матрицы Мюллера; любой оптический элемент описывается своей матрицей Мюллера. Поляризация света может описываться также в рамках формализма Джонса; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором, линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса. Известно, что при описании полностью или частично поляризованного света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований, изоморфная группе Лоренца [2]. Стоит отметить, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим также и для описания частично поляризованного света. Следует обратить внимание и на то, что 4-векторы Стокса полностью и частично поляризованного света являются аналогами изотропных и времени-подобных 4-векторов в рамках специальной теории относительности.

В данной работе мы рассматриваем частично поляризованный свет (анализ проблемы был частично выполнен в [2]). Исходим из разложения биспинора второго ранга по тензорам:

$$U = \Psi \otimes \Psi = \left(-i\Phi + \gamma^b \Phi_b + i\sigma^{ab}\Phi_{ab} + \gamma^5 \tilde{\Phi} + i\gamma^b \gamma^5 \tilde{\Phi}_b\right) E^{-1}\,; \qquad (1)$$

для матриц Дирака будем использовать спинорный базис. Исследуем возможность построения тензоров из двух зарядово-сопряженных спиноров:

$$\Psi \otimes \Psi^{c} = \begin{vmatrix} \xi^{1} \\ \xi^{2} \\ \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} +\eta_{\dot{2}}^{*} \\ -\eta_{\dot{1}}^{*} \\ -\xi^{2*} \\ +\xi^{1*} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} +D^{*} \\ -C^{*} \\ -B^{*} \\ +A^{*} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +AD^{*} & -AC^{*} & -AB^{*} & +AA^{*} \\ +BD^{*} & -BC^{*} & -BB^{*} & +BA^{*} \\ +CD^{*} & -CC^{*} & -CB^{*} & +CA^{*} \\ +DD^{*} & -DC^{*} & -DB^{*} & +DA^{*} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Для эквивалентного представлению $\Phi \otimes \Psi^{c}$ набора тензоров находим следующие явные выражения (знак тильды относится к псевдовеличинам):

для скаляра и псевдоскаляра (чисто мнимых):

$$\Psi = -\frac{1}{4i}(AC^{*} + BD^{*} + CA^{*} + DB^{*}), \qquad \tilde{\Psi} = -\frac{1}{4}(AC^{*} + BD^{*} - CA^{*} - DB^{*});$$

для (вещественного) 4-вектора и (мнимого) псевдо 4-вектора:

$$\Psi^{0} = \frac{1}{4}(AA^{*} + BB^{*} + DD^{*} + CC^{*}), \qquad \Psi^{3} = \frac{1}{4}(AA^{*} - BB^{*} + DD^{*} - CC^{*}),$$

$$\Psi^{1} = \frac{1}{4}(AB^{*} + BA^{*} - CD^{*} - DC^{*}), \qquad \Psi^{2} = -\frac{i}{4}(-AB^{*} + BA^{*} + CD^{*} - DC^{*});$$

$$\tilde{\Psi}^{0} = \frac{1}{4i}(AA^{*} + BB^{*} - DD^{*} - CC^{*}), \qquad \tilde{\Psi}^{3} = \frac{1}{4i}(AA^{*} - BB^{*} - DD^{*} + CC^{*}),$$

$$\tilde{\Psi}^{1} = \frac{1}{4i}(AB^{*} + BA^{*} + CD^{*} + DC^{*}), \qquad \tilde{\Psi}^{2} = -\frac{1}{4}(-AB^{*} + BA^{*} - CD^{*} + DC^{*});$$

для (вещественного) антисимметричного тензора:

$$\Psi^{01} = \frac{i}{4}(AD^{*} + BC^{*} - CB^{*} - DA^{*}), \qquad \Psi^{23} = \frac{1}{4}(AD^{*} + BC^{*} + CB^{*} + DA^{*}),$$

$$\Psi^{02} = -\frac{1}{4}(AD^{*} - BC^{*} - CB^{*} + DA^{*}), \qquad \Psi^{31} = \frac{i}{4}(AD^{*} - BC^{*} + CB^{*} - DA^{*}),$$

$$\Psi^{03} = -\frac{i}{4}(-AC^{*} + BD^{*} + CA^{*} - DB^{*}), \qquad \Psi^{12} = -\frac{1}{4}(-AC^{*} + BD^{*} - CA^{*} + DB^{*}),$$

$$s_{3} = \frac{i}{2}(AC^{*} - BD^{*}), \qquad s_{1} = \frac{i}{2}(AD^{*} + BC^{*}), \qquad s_{2} = -\frac{1}{2}(AD^{*} - BC^{*}).$$

Легко получаем представление для инварианта 4-вектора Ψ^{a}:

$$\Phi^{a}\Phi_{a} = (AC^{*} + BD^{*})(A^{*}C + B^{*}D) = +|AC^{*} + BD^{*}|^{2} \geq 0. \tag{3}$$

С учетом $\Psi^{0} > 0$ это означает, что 4-вектор Ψ^{a} может рассматриваться как четырехмерный вектор Стокса для частично поляризованного света [1].

Комплексный 3-вектор $\mathbf{s}$ из (9) является неизотропным:

$$\mathbf{s}^{2} = -\frac{1}{4}(\xi^{1}\eta_{1}^{*} + \xi^{2}\eta_{2}^{*})^{2} = -\frac{1}{4}(AC^{*} + BD^{*})^{2} \neq 0. \tag{4}$$

Используя представление для (чисто мнимого) псевдо 4-вектора $\tilde{\Psi}^{a}$, находим инвариант

$$\tilde{\Psi}^{a}\tilde{\Psi}_{a} = \tilde{\Psi}_{0}^{2} - \tilde{\Psi}_{1}^{2} - \tilde{\Psi}_{2}^{2} - \tilde{\Psi}_{1}^{3} = \frac{1}{4}(AC^{*} + BD^{*})(A^{*}C + B^{*}D) > 0, \tag{5}$$

т. е. инвариант вещественного 4-вектора $\tilde{\Psi}^{a}$ (мнимой части этого вектора) отрицательный, и такой вещественный 4-вектор $-i\tilde{\Psi}^{a}$ не может рассматриваться как стоксов.

Найдем явные выражения для двух скаляров, двух 4-векторов, а также антисимметричного тензора, который можно описать комплексным 3-вектором s_{j}, при использовании следующей параметризации 4-спинора:

$$\Psi=\begin{vmatrix}A\\B\\C\\D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\,e^{i\alpha}\\b\,e^{i\beta}\\c\,e^{is}\\d\,e^{it}\end{vmatrix}. \tag{6}$$

Имеем

$$\Psi=\frac{i}{4}\,(a\,e^{i\alpha}c\,e^{-is}+b\,e^{i\beta}d\,e^{-it}+c\,e^{is}a\,e^{-i\alpha}+d\,e^{it}b\,e^{-i\beta})=$$

$$=\frac{i}{2}\,[\,ac\cos(\alpha-s)+bd\cos(\beta-t)\,],$$

$$\tilde{\Psi}=-\frac{1}{4}\,(a\,e^{i\alpha}c\,e^{-is}+b\,e^{i\beta}d\,e^{-it}-c\,e^{is}a\,e^{-i\alpha}-d\,e^{it}b\,e^{-i\beta})=$$

$$=-\frac{i}{2}\,[\,ac\sin(\alpha-s)+bd\sin(\beta-t)\,], \tag{7}$$

$$\Psi^0=\frac{1}{4}\,(a^2+b^2+c^2+d^2),\qquad \Psi^3=\frac{1}{4}\,(a^2-b^2-c^2+d^2),$$

$$\Psi^1=\frac{1}{2}\,[\,ab\cos(\alpha-\beta)-cd\cos(s-t)\,],$$

$$\Psi^2=\frac{1}{2}\,[\,ab\sin(\beta-\alpha)+cd\sin(s-t)\,],$$

$$\tilde{\Psi}^0=\frac{1}{4i}\,(a^2+b^2-c^2-d^2),\qquad \tilde{\Psi}^3=\frac{1}{4i}\,(a^2-b^2+c^2-d^2),$$

$$\tilde{\Psi}^1=\frac{1}{2i}\,[\,ab\cos(\alpha-\beta)+cd\cos(s-t)\,],$$

$$\tilde{\Psi}^2=\frac{i}{2}\,[\,ab\sin(\alpha-\beta)+cd\sin(s-t)\,]; \tag{8}$$

для (вещественного) антисимметричного тензора

$$\Psi^{01}=-\frac{1}{2}[\,ad\sin(\alpha-t)+bc\sin(\beta-s)\,],$$

$$\Psi^{23}=\frac{1}{2}[\,ad\cos(\alpha-t)+bc\cos(\beta-s)\,],$$

$$\Psi^{02}=-\frac{1}{2}[\,ad\cos(\alpha-t)-bc\cos(\beta-s)\,],$$

$$\Psi^{31}=-\frac{1}{2}[\,ad\sin(\alpha-t)-bc\sin(\beta-s)\,],$$

$$\Psi^{03}=\frac{1}{2}[\,-ac\sin(\alpha-s)+bd\sin(\beta-t)\,],$$

$$\Psi^{12}=-\frac{1}{2}[\,-ac\cos(\alpha-s)+bd\cos(\beta-t)\,]. \tag{9}$$

Исходный 4-спинор (6) можно представить следующим образом:

$$\Psi=\begin{vmatrix}A\\B\\C\\D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\,e^{i(\alpha-\beta)/2}\;e^{i(\alpha+\beta)/2}\\b\,e^{-i(\alpha-\beta)/2}\;e^{i(\alpha+\beta)/2}\\c\;\,e^{i(s-t)/2}\;e^{i(s+t)/2}\\d\;\,e^{-i(s-t)/2}\;e^{i(s+t)/2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{i(\alpha+\beta)/2}&0&0&0\\0&e^{i(\alpha+\beta)/2}&0&0\\0&0&e^{i(s+t)/2}&0\\0&0&0&e^{i(s+t)/2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a\,e^{+i(\alpha-\beta)/2}\\b\,e^{-i(\alpha-\beta)/2}\\c\,e^{+i(s-t)/2}\\d\,e^{-i(s-t)/2}\end{vmatrix}.$$

Введем 4-спинор $\Psi^{(0)}$, который однозначно определяет стоксов 4-вектор $S^a=\Psi^a$:

$$S^0=\frac{1}{4}\,(a^2+d^2+b^2+c^2),\qquad S^3=\frac{1}{4}\,(a^2+d^2-b^2-c^2),$$

$$S^1 = \frac{1}{2}[\, ab\cos(\alpha-\beta) - cd\,\cos(s-t)\,],$$
$$S^2 = \frac{1}{2}[\, -ab\sin(\alpha-\beta) + cd\,\sin(s-t)\,],$$
$$S^a S_a = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd\cos[(\alpha-\beta)-(s-t)],$$
$$(ac-bd)^2 < S^a S_a < (ac+bd)^2\,, \tag{10}$$
$$\Psi^{(0)} = \begin{vmatrix} a\, e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ b\, e^{-i(\alpha-\beta)/2} \\ c\;\; e^{+i(s-t)/2} \\ d\;\; e^{-i(s-t)/2} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Разложение

$$\Psi = \begin{vmatrix} e^{i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(s+t)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(s+t)/2} \end{vmatrix} \Psi^{(0)}$$

можно представить в виде:

$$\Psi = e^{i\gamma} \begin{vmatrix} e^{i\Gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\Gamma} \end{vmatrix} \Psi^{(0)} = e^{\gamma}\, \exp(i\Gamma\gamma^5)\, \Psi^{(0)}\,. \tag{12}$$

Очевидно, что общий фазовый множитель $e^{i\gamma}$ никак не сказывается на величинах всех тензорных компонент, поскольку биспинор второго ранга равен $U = \Psi \otimes (-i\Gamma^2\Psi^*)$. Очевидно также, что величина Γ никак не проявляет себя в выражениях компонент стоксова 4-вектора.

Отмечаем, что в 4-спинор $\Psi^{(0)}$ входит 6 независимых параметров, а 4-вектор Стокса содержит только 4 независимых параметра. Это означает, что 2 параметра в 4-спиноре $\Psi^{(0)}$ лишние: они не сказываются на величине стоксова 4-вектора. Заметим, что, можно найти простые ограничения, связывающие тензорные величины:

$$S^{ab} S_b = -\tilde{\Psi}\, \Psi^a\,, \qquad S^{ab}\tilde{\Psi}_b = -\tilde{\Psi} S^a\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск: Наука и техника, 1992. – 334 с.

2. Red'kov, V.M. Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.