О. В. ВЕКО[1], Е. М. ОВСИЮК[1], В. М. РЕДЬКОВ[2]
[1]МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)
[2]Институт физики им. Б.И. Степанова (г. Минск, Беларусь)

О 4-СПИНОРАХ ДЖОНСА ПОЛНОСТЬЮ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

Для аналитического описания состояния поляризации света используются 4 параметра Стокса [1]. При любом линейном оптическом процессе параметры Стокса падающего пучка линейно преобразуются в параметры Стокса вышедшего пучка с помощью матрицы Мюллера [1]. Поляризация света может описываться также в рамках формализма Джонса [1]; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором. 2-Мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим также и для описания частично поляризованного света. Известно, что можно выделить подмножества матриц Мюллера и Джонса, которые изоморфны 4-векторным и 2-спинорным представлениям группы Лоренца [2]. В настоящей работе известная теоретико-групповая задача о способах построения 4-тензоров из комплексного 4-спинора формулируется как задача о связях между 4-спинорным (типа Джонса) и тензорным (типа Стокса) описаниями поляризованного света.

Ниже рассматриваем только полностью поляризованный свет. Исходим из разложения биспинора второго ранга по тензорам [3]:

$$U = \Psi \otimes \Psi = \left(-i\Phi + \gamma^b \Phi_b + i\sigma^{ab}\Phi_{ab} + \gamma^5\tilde{\Phi} + i\gamma^b\gamma^5\tilde{\Phi}_b\right)E^{-1}\,; \tag{1}$$

$$\Phi_a = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\gamma_a U\,]\,, \quad \tilde{\Phi}_a = \frac{1}{4i}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\gamma^5\gamma_a U\,]\,,$$

$$\Phi = \frac{i}{4}\,\mathrm{Sp}\,[\,EU\,]\,, \quad \tilde{\Phi} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\gamma^5 U\,]\,, \quad \Phi^{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\sigma^{mn}U\,]\,. \tag{2}$$

Для матриц Дирака будем использовать спинорный базис. Оказывается, что полностью поляризованный свет можно описывать следующим 4-спинором:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \xi \\ \eta = -i\sigma^2\xi^* \end{vmatrix}, \qquad \Psi \otimes \Psi \Rightarrow S_a \neq 0\,, \;\; S_{mn} \neq 0\,, \tag{3}$$

$$S_0 = \frac{1}{2}(\xi^1\xi^{1*} + \xi^2\xi^{2*}) > 0\,, \qquad S_3 = -\frac{1}{2}(\xi^1\xi^{1*} - \xi^2\xi^{2*})\,,$$

$$S_1 = -\frac{1}{2}(\xi^1\xi^{2*} + \xi^2\xi^{1*})\,, \qquad S_2 = -\frac{i}{2}(\xi^1\xi^{2*} - \xi^2\xi^{1*})\,, \tag{4}$$

$$a_1 = S^{01} = \frac{i}{4}\Big[(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2) + (\xi^{2*}\xi^{2*} - \xi^{1*}\xi^{1*})\Big],$$

$$b_1 = S^{23} = \frac{1}{4}\Big[(\xi^1\xi^1 - \xi^2\xi^2) - (\xi^{2*}\xi^{2*} - \xi^{1*}\xi^{1*})\Big],$$

$$a_2 = S^{02} = -\frac{1}{4}\Big[(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2) + (\xi^{2*}\xi^{2*} + \xi^{1*}\xi^{1*})\Big],$$

$$b_2 = S^{31} = -\frac{1}{4i}\Big[(\xi^1\xi^1 + \xi^2\xi^2) - (\xi^{2*}\xi^{2*} + \xi^{1*}\xi^{1*})\Big],$$

$$a_3 = S^{03} = -\frac{i}{2}(\xi^1\xi^2 - \xi^{2*}\xi^{1*})\,, \qquad b_3 = S^{12} = -\frac{1}{2}(\xi^1\xi^2 + \xi^{2*}\xi^{1*})\,. \tag{5}$$

Главный инвариант для 4-вектора $S_0S_0 - S_jS_j = 0$; следовательно, S_a может рассматриваться как стоксов 4-вектор для полностью поляризованного света [1]. В свою очередь, сопутствующий 4-тензор

S^{mn} нужно рассматривать как стоксов тензор поляризации для полностью поляризованного света. Вычислим два инварианта тензора S^{mn}:

$$I_1 = -\frac{1}{2} S^{mn} S_{mn} = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = 0 , \qquad I_2 = \frac{1}{4} \varepsilon_{abmn} S^{ab} S^{mn} = \mathbf{ab} = 0 . \tag{6}$$

Для дальнейшего удобно ввести следующую параметризацию исходного 4-спинора Джонса Ψ с помощью четырех вещественных величин:

$$\Psi = \begin{vmatrix} N\, e^{i\alpha} \\ +M\, e^{i\beta} \\ -M\, e^{-i\beta} \\ N\, e^{-i\alpha} \end{vmatrix}, \qquad \Psi \otimes \Psi \Rightarrow S_a \neq 0,\ S_{mn} \neq 0 . \tag{7}$$

Тогда из (4) следуют формулы для 4-вектора Стокс в виде:

$$S_0 = M^2 + N^2 , \quad S_3 = M^2 - N^2 , \quad S_1 = -2MN \cos(\alpha - \beta) , \quad S_2 = 2MN \sin(\alpha - \beta) , \tag{8}$$

т. е. изотропный вектор Стокса зависит только от трех параметров $M, N, \alpha - \beta$; четвертый параметр $(\alpha + \beta)$ может быть любым – он не влияет на явный вид 4-вектора Стокса:

$$\Psi = \begin{vmatrix} e^{+i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{+i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\alpha+\beta)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i(\alpha+\beta)/2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N\, e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ +M\, e^{-i(\alpha-\beta)/2} \\ -M\, e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ N\, e^{-i(\alpha-\beta)/2} \end{vmatrix}, \quad \Psi = e^{i\gamma_5(\alpha+\beta)/2}\, \Psi^{(0)} . \tag{9}$$

Выражения для компонент 4-вектора Стокса определяются полностью только 4-спинором $\Psi^{(0)}$. Обратные к (8) формулы выглядят так:

$$M = \sqrt{\frac{S_0 + S_3}{2}} , \qquad N = \sqrt{\frac{S_0 - S_3}{2}} , \qquad e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{-S_1 + iS_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} . \tag{10}$$

Найдем в этой параметризации явный вид 4-тензора Стокса:

$$a_1 = -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha - M^2 \sin 2\beta) , \qquad b_1 = +\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha - M^2 \cos 2\beta) ,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha + M^2 \cos 2\beta) , \qquad b_2 = -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha + M^2 \sin 2\beta) ,$$

$$a_3 = +NM \sin(\alpha + \beta) , \qquad b_3 = -NM \cos(\alpha + \beta) . \tag{11}$$

Легко убеждаемся в справедливости равенств:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \frac{(N^2 + M^2)^2}{4} , \quad \mathbf{ab} = 0 , \ \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \frac{(N^2 + M^2)^2}{2} , \qquad a_3^2 + b_3^2 = M^2 N^2 .$$

Эти соотношения позволяют найти величины M, N:

$$M^2 = +\sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2} - \sqrt{a_3^2 + b_3^2}} , \qquad N^2 = +\sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2}} \mp \sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2} - \sqrt{a_3^2 + b_3^2}} . \tag{12}$$

Комплексный 3-вектор Стокса $\mathbf{s} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ преобразуется как 3-вектор относительно комплексной группы вращений $SO(3.C)$. Это означает, что в дополнение к спинорной технике Джонса и мюллеровского векторного формализма можно применять и комплексный 3-мерный векторный формализм, базирующийся на группе $SO(3.C)$.

Формулы говорят о том, что при заданном 4-векторе Стокса (известна процедура измерения его компонент) он однозначно фиксируется параметрами N, M, $\Delta = \alpha - \beta$, но при этом может существовать множество различных сопутствующих 4-тензоров Стокса и свобода в их выборе определяется параметром $\alpha + \beta$. Другими словами, измеренный 4-вектор Стокса фиксирует у 4-спинора Джонса только три параметра из четырех, соответственно существует множество 4-векторов Стокса, ограниченных этой дополнительной однопараметрической неопределенностью в 4-спиноре Джонса. Наиболее простой выбор частного случая 4-тензора Джонса достигается при $\beta = -\alpha$:

$$\Psi^{(0)} = \begin{vmatrix} N\, e^{+i\alpha} \\ +M\, e^{-i\alpha} \\ -M\, e^{+i\alpha} \\ N\, e^{-i\alpha} \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

$$a_1^{(0)} = -\frac{1}{2}(N^2 + M^2)\sin 2\alpha\,, \qquad b_1^{(0)} = +\frac{1}{2}(N^2 - M^2)\cos 2\alpha\,,$$

$$a_2^{(0)} = -\frac{1}{2}(N^2 + M^2)\cos 2\alpha\,, \qquad b_2^{(0)} = -\frac{1}{2}(N^2 - M^2)\sin 2\alpha\,,$$

$$a_3^{(0)} = 0\,, \qquad b_3^{(0)} = -NM\,, \qquad s_3 = -iMN\,. \qquad (14)$$

Зависимость тензора Стокса от дополнительного параметра $\alpha + \beta$ можно пояснить, обратившись к формулам (2). Ниже используем обозначения: $\sigma = (\alpha + \beta)/2$, $\exp[i\gamma^5 \sigma] = \Gamma_\sigma$,

$$S^{mn} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,[\,\Gamma_{2\sigma} E \sigma^{mn} (\Psi^0 \otimes \Psi^0)\,] \neq (\Phi^{mn})^{(0)}\,, \qquad (S^{mn})^{(0)} = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\,[\,E\sigma^{mn}(\Psi^0 \otimes \Psi^0)\,]\,. \qquad (15)$$

Исходный 4-спинор в (1) определяется 4 независимыми комплексными параметрами (или 4 комплексными функциями). Соответствующие ему тензоры содержат $4 + 6 = 10$ параметров; условия изотропности комплексного 4-вектора и тензора накладывают дополнительные условия, но их явно недостаточно, чтобы оставить только 4 независимых величины. Дополнительные условия связи следующие:

$$S^{ab} S_b = 0 \qquad \text{или} \qquad S_0\, \mathbf{a} = \mathbf{S} \times \mathbf{b}\,.$$

Построенные выше релятивистские 4-спиноры Джонса являются обобщением нерелятивистских 2-мерных спиноров Джонса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск: Наука и техника, 1992. – 334 с.

2. Red'kov, V.M. Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.

3. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 495 с.