

МГПУ им. И.П. Шамякина

**Н. Н. ЕГОРОВ**

МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
В ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦАХ MS EXCEL**

Компьютерное моделирование является неотъемлемой частью информационной подготовки современного специалиста практически в любой области. В 2012 году приказом министра образования Республики Беларусь введена новая учебная программа [1], в которой до трети времени отводится на тесно связанные разделы «Математическое моделирование и вычислительные методы» и «Методы оптимизации и системы поддержки принятия решений».

Решение дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) является одним из наиболее сложных для усвоения вопросов. В большинстве работ последних лет предлагается решение осуществлять в пакетах символьной математики (ПСМ) [2, 3]. На наш взгляд, первичное знакомство с методикой численного решения ДУЧП через ПСМ только увеличивает разрыв между модельными и реальными ситуациями, между получаемыми числами и пониманием протекающих процессов.

Именно поэтому начинать знакомство с численным решением ДУЧП лучше с абсолютно открытых и хорошо знакомых начинающему исследователю средств. Мы рекомендуем использовать электронные таблицы MS EXCEL.

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности в канонической форме:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$$

с граничными  $u(t,0)=1$ ,  $u(t,1)=0$  и начальными  $u(0,x)=0$  условиями. Физически данная задача может быть сформулирована так: имеется металлический стержень единичной длины, находящийся при температуре  $T_0$ . Пренебрегая оттоком тепла через боковую поверхность, рассмотрим изменение температуры вдоль стержня со временем, если в момент времени  $t=0$  приведем концы стержня в контакт с нагревателем и холодильником бесконечных теплоемкостей, имеющими температуры  $T_1$  и  $T_0$  соответственно.

Используя стандартную процедуру дискретизации уравнения и граничных условий получим  $u(t_{i+1}, x_i) = au(t_i, x_{i+1}) + (1-2a)u(t_i, x_i) + au(t_i, x_{i-1})$  – явная схема

или

$$au(t_{i+1}, x_{i-1}) - (1+2a)u(t_{i+1}, x_i) + au(t_{i+1}, x_{i+1}) = -u(t_i, x_i) \text{ – неявная схема,}$$

где  $a = \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2}$ ,  $\Delta t$  – шаг по времени,  $\Delta x$  – шаг по длине.

Для вычисления по явной схеме можно, например, в столбце В ввести граничные условия (1, 0, 0, ..., 0), а в столбцы С и т. д. ввести формулы

$$=B3$$

$$=B3*\$B\$25+B4*(1-2*\$B\$25)+B5*\$B\$25$$

(В ячейке B25 введено значение а.)

В результате автозаполнения в соседние ячейки в столбцах будут находиться распределения температуры в последовательные моменты времени кратные  $\Delta t$ .

Вычисления по неявной схеме сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки [4]:

$$x_{n-1} = P_{n-1}x_n + Q_{n-1},$$

где для нахождения прогоночных коэффициентов P в ячейках B26:B44 вводятся формулы:

$$=\$B\$24/((1+2*\$B\$24)-\$B\$24*B25) \text{ и т. д.,}$$

а для нахождения Q в ячейках B48:B66 – формулы:

$$=(\$B\$24*B47+B4+\$B\$24*B3)/((1+2*\$B\$24)-\$B\$24*B25) \text{ и т. д.}$$

Результаты решения по явной и неявной схемам для моментов времени 50, 100, 250 и 500 $\Delta t$  представлены на рисунке 1а и 1б, соответственно.

При расчетах полагалось  $a = 1/11$ .

Сравнение графиков показывает некоторое различие (до 4% текущего значения). Причину этого можно объяснить погрешностью вычислительной схемы, на что следует обращать внимание при изучении вычислительных методов. Целесообразно также исследовать влияние параметра а на устойчивость расчетных схем. Например, на рисунке 2 показаны зависимости, аналогичные рисунку 1. При  $a = 1$  получим абсолютно различные результаты. Явная схема является неустойчивой и не может использоваться при  $a \geq 1/2$ . Для нашего случая на рисунке 2а представлен «нефизичный» результат: не только нереально большие, но и отрицательные температуры.

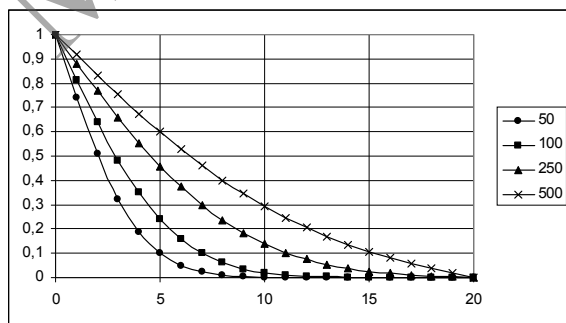


Рисунок 1а

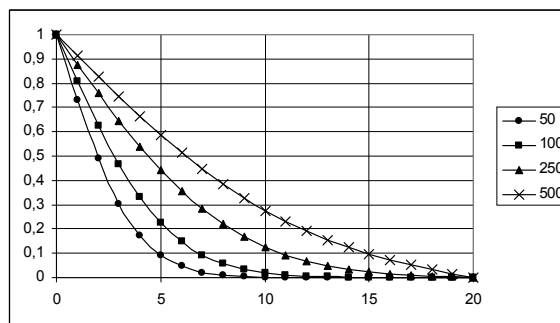


Рисунок 1б

Неявная схема, несмотря на большую трудоемкость, дает вполне реалистичные результаты при любом параметре  $a$ . Так при достаточно большом времени пространственное распределение температуры должно стремиться к линейному от 1 до 0, что наблюдается на рисунках 1 и 2б. При этом видно, что при увеличении теплопроводности  $\sigma$  «выпрямление» распределения наступает раньше.

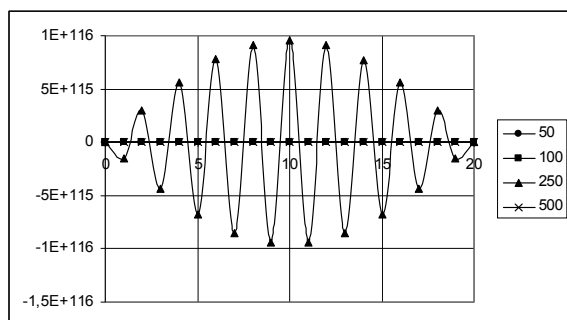


Рисунок 2а

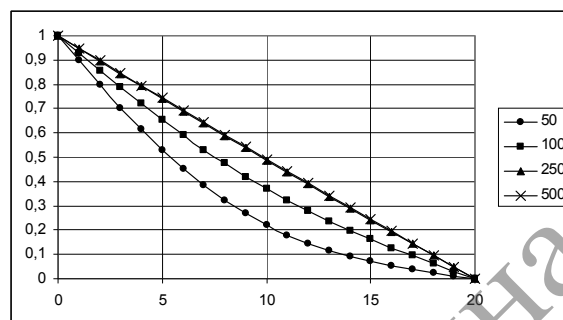


Рисунок 2б

Таким образом, использование электронных таблиц с одной стороны позволяет получить вполне реалистичные решения задач, освоить технологию решения дифференциальных уравнений в частных производных, а с другой – помочь преодолеть психологический барьер, возникающий у студентов при необходимости проведения огромного объема вычислительных процедур.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Об утверждении программ-минимумов кандидатских экзаменов и кандидатского зачета (дифференцированного зачета) по общеобразовательным дисциплинам: постановление Министерства образования Респ. Беларусь, 13 авг. 2012 г., № 97 // Нац. реестр. – 2012. –8/26296.
2. Рындин, Е.А. Методы решения задач математической физики: учеб. пособие / Е.А. Рындин. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2003. – 119 с.
3. Кулешов, А.А. Уравнения математической физики в системе Mathematica / А.А.Кулешов. – Минск: БГУ, 2004. – 294 с.
4. Киреев, В.И. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. – М.: Высшая школа, 2004. – 480 с.