МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПАКЕТЕ PDE TOOLBOX

Пашкевич Табриз (УО МГПУ им. И. П. Шамякина, Беларусь)
Научный руководитель – В. В. Давыдовская, канд. физ.-мат. наук, доц.

Дифференциальные уравнения в частных производных представляют собой одну из наиболее сложных и одновременно интересных задач вычислительной математики. Эти уравнения характеризуются тем, что для их решения не существует единого универсального алгоритма и большинство задач требует своего собственного особого подхода. Уравнениями в частных производных описывается множество разнообразных физических явлений, и с их помощью можно с успехом моделировать самые сложные явления и процессы (диффузия, гидродинамика, квантовая механика, экология и т. д.) [1].

Существует ряд прикладных математических пакетов, позволяющих решать дифференциальные уравнения таких типов, например, Maple, Mathematca, Mathcad, MATLAB и др.

Однако наиболее простым пользовательским интерфейсом обладает приложение Partial Differential Equation Toolbox, которое предназначено для решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных в двумерных областях методом конечных элементов [2].

Двумерное уравнение теплопроводности или, уравнение диффузии тепла описывает динамику распределения температуры u (x, y, t) на плоской поверхности в зависимости от времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + Q \qquad 1)$$

Физический смысл коэффициента k, который также может быть функцией как координат, так и самой температуры, заключается в задания скорости перетекания тепла от более нагретых областей в менее нагретые. Функция Q (x, y, t, u) описывает приток тепла извне, т. е. источники тепла, которые также могут зависеть как от пространственных координат (что задает локализацию источников), так и от времени, и от температуры u [3].

Для того чтобы правильно поставить краевую задачу для двумерного уравнения теплопроводности, следует определить следующие дополнительные условия:

– граничные условия, т. е. динамику функции u (x, y, t) и (или) ее производных на границах расчетной области;

– начальное условие, т. е. функцию u (x, y, t).

Найдем решение следующей двумерной задачи:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) = Q$, $(x, y) \in \Omega$ с краевыми условиями

$$u\big|_{\Gamma_u} = u_0,\ k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_q} = -u_1 \text{ где } \Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma,\ \text{n-нормаль к границе}.$$

Решим данную задачу используя PDE toolbox.

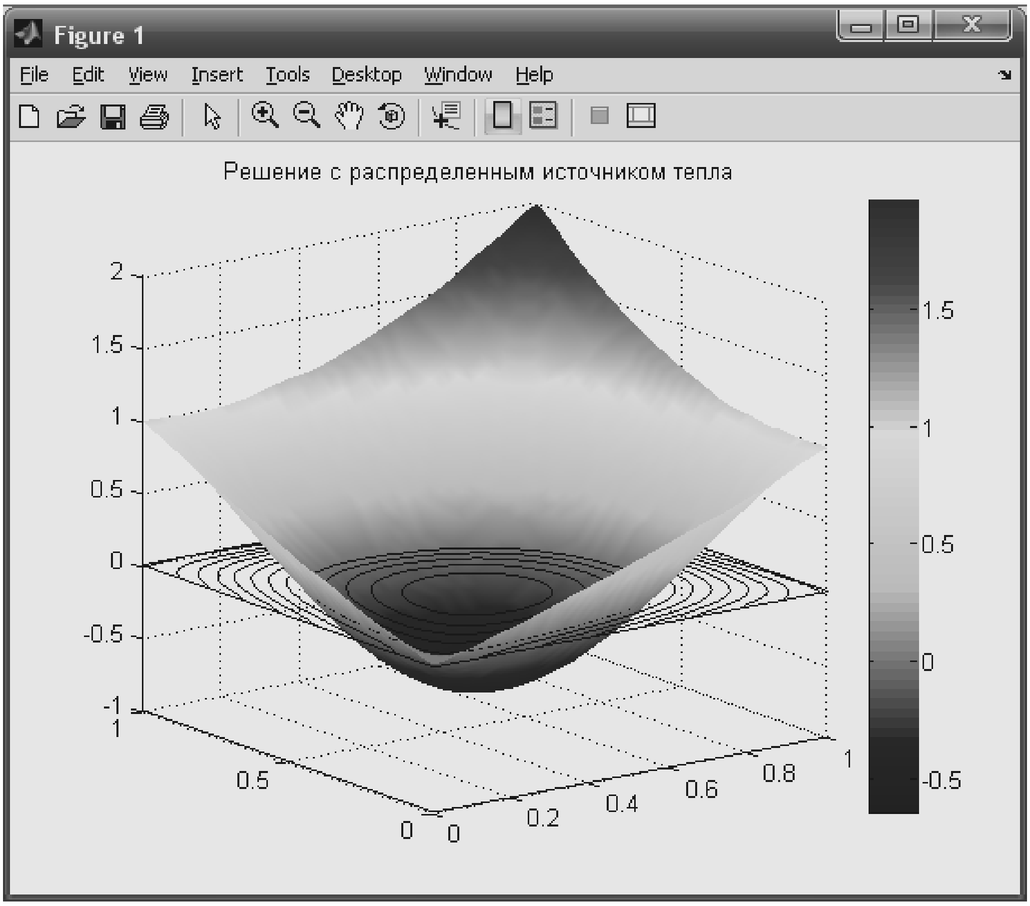

Рисунок 1 – PDE Toolbox: трехмерный вид графика решения

В работе проведен математический эксперимент по изучению процесса теплопроводности в программе MATLAB. Пакет PDE Toolbox позволил решить поставленную задачу, т. е. определить температуру в заданной области, а также построить график распределения температур по всему объекту исследования. Возможности среды PDE Toolbox программы MATLAB не исчерпываются решением стационарных задач теплопроводности.

Список использованной литературы

1. Теплопередача: учебник для вузов. / В.П. Исаченко [и др.] – М. : Энергоиздат, 1981. – 417 с.

2. Поршнев, С. В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB / С. В. Поршнев. – М. : Телеком, 2003. – 592 с.

3. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных : учеб. пособие / В. П. Михайлов. – М. : Наука, 1983. – 424 с.