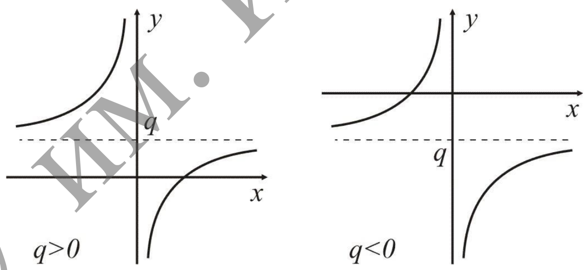
В. В. ШКУТ, С. М. БИРУК
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Настоящий доклад посвящен качественному исследованию системы

$$\frac{dx}{dt} = x + \sum_{i+j=2}^{3} a_{ij} x^i y^j \equiv x + \sum_{k=2}^{3} P_k(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=2}^{3} b_{ij} x^i y^j \equiv \sum_{k=2}^{3} Q_k(x, y) \tag{1}$$

при следующих предположениях: 1) кривая $w(x, y) \equiv xy^2 + px + y + q = 0, \quad pq \neq 0$ является частным интегралом системы (1); 2) $b_{12} = 0$. Кривая $w(x, y) = 0$ имеет вид



Лемма. Для того чтобы для системы (1) выполнялись условия 1), 2), необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - qx^2 - 2qb_{03}xy + (1 + 2q^2 b_{03})x^2 y - b_{03}xy^2 \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= qb_{03}y^2 + b_{03}y^3 \equiv Q(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $b_{03} \neq 0$ и $p = -q^2$. Иначе $x = 0$ – особая линия. Также $b_{03} \neq -\dfrac{1}{q^2}$. Иначе $y = -q$ – особая линия.

При доказательстве леммы используется равенство [1]: если кривая $w(x, y)$ – является частным интегралом системы (1), то

$$\frac{\partial w}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y} Q(x, y) = w(x, y) F(x, y), \tag{3}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – правые части уравнений системы, а $F(x, y)$, в данном случае – многочлен второй степени относительно x и y.

В нашем случае равенство (3) имеет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial x}P(x,y)+\frac{\partial w}{\partial y}Q(x,y)=w(x,y)\left(-qx+(1+2q^2b_{03})xy+b_{03}y^2\right).$$

Замечаем, что $x=0$ и $y=0$ – частные интегралы системы (2).

Далее находим особые точки системы (2) в конечной части плоскости, решая систему уравнений

$$x-qx^2-2qb_{03}xy+(1+2q^2b_{03})x^2y-b_{03}xy^2=0, \qquad qy^2+y^3=0. \tag{4}$$

В результате получим возможные особые точки:

$$O\left(0,0\right),\quad A\left(\frac{1}{q},0\right),\quad B\left(\frac{1}{2q},-q\right),\quad C\left(0,-q\right).$$

Для отыскания особых точек в бесконечной части плоскости к системе (2) последовательно применяем преобразования Пуанкаре [2]:

$$x=\frac{1}{z},\quad x=\frac{u}{z}\quad \text{и}\quad x=\frac{v}{z},\quad x=\frac{1}{z},\qquad \frac{dt}{z^2}\to dt.$$

Получим системы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=-(1+2q^2b_{03})u^2+quz+2b_{03}u^3+3qb_{03}u^2z-uz^2\equiv\overline{P}(u,z),\\ \frac{dz}{dt}&=-(1+2q^2b_{03})uz+qz^2+b_{03}u^2z+2qb_{03}uz^2-z^3\equiv\overline{Q}(u,z),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=-2b_{03}v+(1+2q^2b_{03})v^2-3qb_{03}vz-qv^2z+vz^2\equiv\overline{\overline{P}}(v,z),\\ \frac{dz}{dt}&=-b_{03}z-qb_{03}z^2\equiv\overline{\overline{Q}}(u,z).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Преобразования Пуанкаре переводят бесконечно удаленные особые точки системы (2) в конечные особые точки систем (5) и (6). Для системы (5) особыми точками будут $O'(0,0)$ и $D\left(\frac{1+2q^2b_{03}}{2b_{03}},0\right)$, а для системы (6) особой точкой будет $O''(0,0)$.

Это значит, что система (2) в бесконечной части плоскости имеет особые точки, лежащие на «концах» координатных осей Ox, Oy и особую точку в направлении $u=\frac{1+2q^2b_{03}}{2b_{03}}$. Характер всех найденных особых точек в конечной и бесконечной частях плоскости выясняется с помощью характеристических чисел, если эти числа отличны от нуля, и с помощью других методов в противном случае (см., например, [3]).

Результаты исследования особых точек системы (2) представим в виде таблицы.

	O	***A***	***B***	***C***	***O′*** *индекс*	***D***	***O″***
$b_{03}<-\frac{1}{q^2}$	с-у	с-у	ч.с.	у	1	ч.с.	у
$-\frac{1}{q^2}<b_{03}<-\frac{1}{2q^2}$	с-у	с-у	у	ч.с.	1	ч.с.	у
$b_{03}=-\frac{1}{2q^2}$	с-у	с-у	у	ч.с.	0	–	у
$-\frac{1}{2q^2}<b_{03}<0$	с-у	с-у	у	ч.с.	1	ч.с.	у
$b_{03}>0$	с-у	с-у	ч.с.	у	1	ч.с.	у

В таблице: с-у – седло-узел, ч.с. – четырехсепаратрисное седло, у – узел.

Так как особые точки B и C лежат на частных интегралах $w(x, y) = 0$ и $x = 0$, то система (2) предельных циклов не имеет. По результатам исследования строятся качественные картины поведения траекторий системы (2) в круге Пуанкаре.

Результаты данного доклада могут быть использованы при чтении дисциплины по выбору «Качественная теория дифференциальных уравнений», которая читается на физико-математическом факультете для специальностей «Физика и математика» и «Математика и информатика».

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин, Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1972. – 684 с.

2. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

3. Андреев, А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений / А.Ф. Андреев. – Минск: Вышэйшая школа, 1979. – 136 с.