В. М. РЕДЬКОВ, Е. М. ОВСИЮК
Институт физики им. Б.И. Степанова (г. Минск, Беларусь)
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

КЛАССИФИКАЦИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ 4-МЕРНЫХ МАТРИЦ СО СТРУКТУРОЙ ПОЛУГРУПП И ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ ОПТИКА

В поляризационной оптике важную роль играют так называемые матрицы Мюллера – вещественные 4-мерные матрицы, описывающие действие оптических элементов на поляризацию света, описываемого 4-мерными векторами Стокса [1]. Важным является вопрос о классификации матриц Мюллера. В частности, особый интерес могут представлять вырожденные матрицы Мюллера (матрицы с нулевым определителем, для которых выполняется закон умножения, но не существует обратных элементов). В работах [2], [3] была развита методика использования для параметризации произвольных 4-мерных матриц базиса Дирака. В частности, в спинорном базисе любую 4-мерную матрицу можно представить как параметризованную четырьмя (в общем случае комплексными) четырехмерными векторами:

$$G = \begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\,\vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n}\,\vec{\sigma} \\ l_0 + \mathbf{l}\,\vec{\sigma} & m_0 + \mathbf{m}\,\vec{\sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K & N \\ L & M \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

При этом закон умножения имеет вид:

$$k_0 = k_0\, k_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{k} + n'_0\, l_0 + \mathbf{n}'\,\mathbf{l}, \qquad m_0 = m_0\, m_0 + \mathbf{m}'\,\mathbf{m} + l'_0\, n_0 + \mathbf{l}'\,\mathbf{n},$$

$$n_0 = k_0\, n_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{n} + n'_0\, m_0 + \mathbf{n}'\,\mathbf{m}, \qquad l_0 = l_0\, k_0 + \mathbf{l}'\,\mathbf{k} + m'_0\, l_0 + \mathbf{m}'\,\mathbf{l},$$

$$\mathbf{k}'' = k'_0\,\mathbf{k} + \mathbf{k}'\,k_0 + i\,\mathbf{k}'\times\mathbf{k} + n_0\,\mathbf{l} + \mathbf{n}'\,l_0 + i\,\mathbf{n}'\times\mathbf{l},$$

$$\mathbf{m}'' = m'_0\,\mathbf{m} + \mathbf{m}'\,m_0 + i\,\mathbf{m}'\times\mathbf{m} + l_0\,\mathbf{n} + \mathbf{l}'\,n_0 + i\,\mathbf{l}'\times\mathbf{n},$$

$$\mathbf{n}'' = k'_0\,\mathbf{n} + \mathbf{k}'\,n_0 + i\,\mathbf{k}'\times\mathbf{n} + n_0\,\mathbf{m} + \mathbf{n}'\,m_0 + i\,\mathbf{n}'\times\mathbf{m},$$

$$\mathbf{l}'' = l'_0\,\mathbf{k} + \mathbf{l}'\,k_0 + i\,\mathbf{l}'\times\mathbf{k} + m_0\,\mathbf{l} + \mathbf{m}'\,l_0 + i\,\mathbf{m}'\times\mathbf{l}. \qquad (2)$$

В настоящей работе исследуются вырожденные 4-мерные матрицы с рангом 1, 2, 3. Для выделения возможных классов вырожденных матриц рангов 1 и 2 используется следующий прием: накладываем такие линейные условия связи на параметры (k, m, l, n), которые можно совместить с законом умножения (2). Все полученные при этом подмножества матриц будут либо подгруппами, либо полугруппами. Для получения возможных вырожденных матриц ранга 3 перечисляются 16 способов получения 4-мерных матриц с нулевыми определителями.

Сначала рассматриваем варианты с одним независимым вектором.

Вариант I(k):

$$\mathbf{n} = A\,\mathbf{k}\,, n_0 = \alpha\, k_0\,, \qquad \mathbf{m} = B\,\mathbf{k}\,, m_0 = \beta\, k_0\,, \qquad \mathbf{l} = D\,\mathbf{k}\,,\ l_0 = t\, k_0\,; \tag{3a}$$

решения:

$$(K-1) \qquad G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (K-2) \qquad G = \begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0 + \mathbf{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix},$$

$$(K-3) \qquad G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix}, \qquad (K-4) \qquad G = \begin{vmatrix} K & AK \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(K-5) \qquad G = \begin{vmatrix} K & AK \\ DK & ADK \end{vmatrix}, \qquad (K-6) \qquad G = \begin{vmatrix} k_0 + \vec{k}\vec{\sigma} & Ak_0 + A\vec{k}\vec{\sigma} \\ tk_0 - A^{-1}\vec{k}\vec{\sigma} & Atk_0 - \vec{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix},$$

$$(K-7) \qquad G = \begin{vmatrix} k_0 + \vec{k}\vec{\sigma} & \alpha k_0 + A\vec{k}\vec{\sigma} \\ -A^{-1}(k_0 + \vec{k}\vec{\sigma}) & -A^{-1}\alpha k_0 - \vec{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}. \tag{3b}$$

Здесь существуют только 7 типов решений; с точки зрения получения подгрупп есть только один вариант $(K-2)$, остальные 6 приводят к структурам полугрупп (матриц с рангом 2).

Вариант I(m)

$$\mathbf{n} = A\,\mathbf{m}\,, n_0 = \alpha\, m_0\,, \qquad \mathbf{k} = B\,\mathbf{m}\,, k_0 = \beta\, m_0\,, \qquad \mathbf{l} = D\,\mathbf{m}\,,\ l_0 = t\, m_0\,; \tag{4a}$$

решения:

$$(M-1) \qquad G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix}, \qquad (M-2) \qquad G = \begin{vmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix},$$

$$(M-3) \qquad G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ DM & M \end{vmatrix}, \qquad (M-4) \qquad G = \begin{vmatrix} 0 & AM \\ 0 & M \end{vmatrix},$$

$$(M-5) \qquad G = \begin{vmatrix} (Atm_0 - \vec{m}\vec{\sigma}) & (Am_0 + A\vec{m}\vec{\sigma}) \\ (tm_0 - A^{-1}\vec{m}\vec{\sigma}) & (m_0 + \vec{m}\vec{\sigma}) \end{vmatrix},$$

$$(M-6) \qquad G = \begin{vmatrix} (-\alpha A^{-1}tm_0 - \vec{m}\vec{\sigma}) & (\alpha m_0 + A\vec{m}\vec{\sigma}) \\ (A^{-1}m_0 + A^{-1}\vec{m}\vec{\sigma}) & (m_0 + \vec{m}\vec{\sigma}) \end{vmatrix},$$

$$(M-7) \qquad G = \begin{vmatrix} ADM & AM \\ DM & M \end{vmatrix}. \tag{4b}$$

Все случаи, за исключением $(M-2)$, описывают полугруппы ранга 2.

Вариант I(n)

$$\mathbf{k} = A\,\mathbf{n}\,, k_0 = \alpha\, n_0\,, \qquad \mathbf{m} = B\,\mathbf{n}\,, m_0 = \beta\, n_0\,, \qquad \mathbf{l} = D\,\mathbf{n}\,, l_0 = t\, n_0\,; \tag{5a}$$

решения:

$$(N-1) \qquad G = \begin{vmatrix} AN & N \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (N-2) \qquad G = \begin{vmatrix} AN & N \\ A^2N & AN \end{vmatrix},$$

$$(N-3) \qquad G = \begin{vmatrix} \alpha n_0 + A\mathbf{n}\vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n}\vec{\sigma} \\ -\alpha An_0 - A^2\mathbf{n}\vec{\sigma} & -An_0 - A\mathbf{n}\vec{\sigma} \end{vmatrix},$$

$$(N-4) \qquad G = \begin{vmatrix} An_0 + A\mathbf{n}\vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n}\vec{\sigma} \\ \beta An_0 - A^2\mathbf{n}\vec{\sigma} & \beta n_0 - A\mathbf{n}\vec{\sigma} \end{vmatrix}. \tag{5b}$$

Все 4 решения описывают полугруппы ранга 2.

Вариант I(l):

$$\mathbf{k} = A\,\mathbf{l}\,, k_0 = \alpha\, l_0\,, \qquad \mathbf{m} = B\,\mathbf{l}\,, m_0 = \beta\, l_0\,, \qquad \mathbf{n} = D\,\mathbf{l}\,, n_0 = t\, l_0\,; \tag{6a}$$

решения:

$$(L-1)\qquad G=\begin{vmatrix} AL & 0 \\ L & 0 \end{vmatrix},\qquad (L-2)\qquad G=\begin{vmatrix} AL & A^2L \\ L & AL \end{vmatrix},$$

$$(L-3)\quad G=\begin{vmatrix} \alpha l_0 + A\mathbf{l}\vec{\sigma} & -\alpha A l_0 - A^2\mathbf{l} \\ l_0 + \mathbf{l}\vec{\sigma}\vec{\sigma} & -Al_0 - A\mathbf{l}\vec{\sigma} \end{vmatrix},\qquad (L-4)\quad G=\begin{vmatrix} Al_0 + A\mathbf{l}\vec{\sigma} & \beta A l_0 - A^2\mathbf{l}\vec{\sigma} \\ l_0 + \mathbf{l}\vec{\sigma} & \beta l_0 - A\mathbf{l}\vec{\sigma} \end{vmatrix}. \tag{6b}$$

Все 4 решения описывают полугруппы ранга 2.

Рассмотрим теперь случаи двух независимых векторов.

Вариант II(k,m)

$$\mathbf{n} = A\mathbf{k} + B\mathbf{m}\,,\, n_0 = \alpha k_0 + \beta m_0\,,\qquad \mathbf{l} = C\mathbf{k} + D\mathbf{m}\,,\, l_0 = sk_0 + tm_0\,; \tag{7a}$$

решения:

$$(KM-1)\qquad G=\begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix},\qquad (KM-2)\qquad G=\begin{vmatrix} K & 0 \\ D(M-K) & M \end{vmatrix},$$

$$(KM-3)\qquad G=\begin{vmatrix} K & BM \\ B^{-1}K & M \end{vmatrix},\qquad (KM-4)\qquad G=\begin{vmatrix} K & A(K-M) \\ 0 & M \end{vmatrix},$$

$$(KM-5)\qquad G=\begin{vmatrix} K & A(K-M) \\ C(K-M) & M \end{vmatrix}. \tag{7b}$$

Все решения за исключением $(KM-1)$ описывают полугруппы ранга 2.

Вариант II(l,n)

$$\mathbf{k} = (A\mathbf{l} + B\mathbf{n})\,,\, k_0 = (\alpha l_0 + \beta n_0)\,,\qquad \mathbf{m} = (D\mathbf{l} + C\mathbf{n})\,,\, m_0 = (tl_0 + sn_0)\,; \tag{8a}$$

решения:

$$(LN-1)\qquad G=\begin{vmatrix} AL & N \\ L & A^{-1}N \end{vmatrix},\qquad (LN-2)\qquad G=\begin{vmatrix} BN & N \\ L & B^{-1}L \end{vmatrix}. \tag{8b}$$

Оба решения описывают полугруппы ранга 2.

Вариант II(k,n)

$$\mathbf{l} = (A\mathbf{k} + B\mathbf{n})\,,\qquad l_0 = (\alpha k_0 + \beta n_0)\,,$$
$$\mathbf{m} = (D\mathbf{n} + C\mathbf{k})\,,\qquad m_0 = (tn_0 + sk_0)\,; \tag{9a}$$

решения:

$$(KN-1)\qquad G=\begin{vmatrix} K & N \\ AK & AN \end{vmatrix},\qquad (KN-2)\qquad G=\begin{vmatrix} K & N \\ 0 & K \end{vmatrix}. \tag{9b}$$

Первое решение описывает группу, второе – полугруппу ранга 2.

Вариант II(m,l)

$$\mathbf{n} = A\mathbf{m} + B\mathbf{l}\,,\, l_0 = \alpha m_0 + \beta l_0\,,\qquad \mathbf{k} = D\mathbf{l} + C\mathbf{m}\,,\, k_0 = tl_0 + sm_0\,; \tag{10a}$$

решения:

$$(ML-1)\qquad G=\begin{vmatrix} AL & AM \\ L & M \end{vmatrix},\qquad (ML-2)\qquad \begin{vmatrix} M & 0 \\ L & M \end{vmatrix}. \tag{10b}$$

Первое решение описывает группу, второе – полугруппу ранга 2.

Переходим к анализу ситуации с 3 независимыми векторами.

Вариант I(k,m,n):

$$\mathbf{l} = A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n}\,,\qquad l_0 = \alpha k_0 + \beta m_0 + sn_0\,; \tag{11a}$$

решения:

$$(KMN-1)\qquad G=\begin{vmatrix} K & N \\ 0 & M \end{vmatrix},\qquad (KMN-2)\qquad G=\begin{vmatrix} K & N \\ -K+M+N & M \end{vmatrix}. \tag{11b}$$

Первое решение описывает группу, второе – полугруппу ранга 2. Есть аналогичные возможности для **варианта I(kml)**.

Вариант I(n,l,k)

$$\mathbf{m} = A\mathbf{n} + B\mathbf{l} + C\mathbf{k}\,,\qquad m_0 = \alpha n_0 + \beta l_0 + sk_0\,; \tag{12a}$$

решение:

$$(NLK-1) \qquad G = \begin{vmatrix} K & N \\ L & (K + AN - A^{-1}L) \end{vmatrix} \tag{12b}$$

описывает полугруппу ранга 2. Есть аналогичное решение для **варианта I(n,l,m)**.

Во всех рассмотренных выше случаях полугрупп ранга 2 легко можно перейти, добавив условие равенства нулю определителя основной 2×2 -матрицы, к вырожденным 4-мерным матрицам ранга 1.

Обратимся к описанию вырожденных матриц Мюллера ранга 3. Учитывая явный вид матриц G, легко понять, что существуют 16 простых способов получить полугруппы ранга 3. Для этого достаточно занулять любую i -строку и любой j -столбец в исходной 4-мерной матрице. Совместимость закона умножения с этими линейными ограничениями очевидна.

Например, вариант (30)

$$\begin{vmatrix} k_0+k_3 & k_1-ik_2 & n_0+n_3 & n_1-in_2 \\ k_1+ik_2 & k_0-k_3 & n_1+in_2 & n_0-n_3 \\ l_0+l_3 & l_1-il_2 & m_0+m_3 & m_1-im_2 \\ l_1+il_2 & l_0-l_3 & m_1+im_2 & m_0-m_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2k_1 & n_0+n_3 & n_1-in_2 \\ 0 & 2k_0 & n_1+in_2 & n_0-n_3 \\ 0 & 2l_1 & 2m_0 & 2m_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где учтено

$$l_0 = 0, \qquad l_3 = 0, \qquad l_1 = -il_2,$$
$$k_0 = -k_3, \qquad k_1 = -ik_2, \qquad m_1 = -im_2, \qquad m_0 = m_3. \tag{13}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск: Наука и техника, 1992. – 334 с.

2. Богуш, А.А. О четырехмерной векторной параметризации группы и некоторых ее подгрупп / А.А. Богуш, В.М. Редьков // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 57–63.

3. Bogush, A.A. On Unique parametrization of the linear group $GL(4.C)$ and its subgroups by using the Dirac algebra basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.