С. М. БИРУК
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

**ТРАЕКТОРИИ КЛАССА КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ
С ДВУКРАТНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ НА СФЕРЕ БЕНДИКСОНА**

Теорема [1]: *Для того чтобы автономная полиномиальная дифференциальная система второго порядка имела двукратный линейный частный интеграл* $w:(x,y)\to x \ \ \forall (x,y)\in \mathbf{R}^2$, *достаточно, чтобы она некоторым невырожденным линейным преобразованием приводилась к виду*

$$\frac{dx}{dt}=x^2, \qquad \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^i y^j. \tag{1}$$

Поставим задачу: исследовать поведение траекторий системы (1) при $b_{02}=0,\ \ |b_{00}|+|b_{01}|\neq 0,$ далее системы (1'), на сфере Бендиксона.

Поведение траекторий на сфере Бендиксона будем описывать посредством атласа, состоящего из двух координатных карт KB_1 и KB_2. Карта KB_1 представляет собой круг, состоящий из точек фазовой плоскости Oxy, с центром в точке $O(0,0)$, на котором лежат все изолированные состояния равновесия системы (1'), отличные от бесконечно удаленного. Карта KB_2 – круг из точек плоскости $O^*\xi\zeta$ с центром в начале координат, на котором лежит не более одного изолированного состояния равновесия $O^*(0,0)$ системы, полученной из (1') при преобразовании Бендиксона

$$x=\frac{4\xi}{\xi^2+\zeta^2},\qquad y=\frac{4\zeta}{\xi^2+\zeta^2}\qquad \forall(\xi,\zeta)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\ .$$

Такой подход к описанию поведения траекторий дифференциальной системы на сфере Бендиксона предложен в [2].

При исследовании поведения траекторий системы (1') в окрестности бесконечно удаленной точки сферы Бендиксона [2] различаем два случая: $|b_{20}|+|b_{11}-1|\neq 0,$ когда система (1') имеет неособый тип при преобразовании Бендиксона, и $b_{20}=0,\ b_{11}=1$, когда система (1') имеет особый тип при преобразовании Бендиксона [2].

В первом случае преобразованием Бендиксона систему (1') приводим к виду

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\rho}&=-4\xi^4-8b_{20}\xi^3\zeta+4(1-2b_{11})\xi^2\zeta^2+2b_{20}\xi^4\zeta-2b_{01}\xi^3\zeta^2-\\
&\quad-2b_{10}\xi^2\zeta^3-2b_{01}\xi\zeta^4-\frac{b_{00}}{2}\xi^5\zeta-b_{00}\xi^3\zeta^3-\frac{b_{00}}{2}\xi\zeta^5,\\
\frac{d\zeta}{d\rho}&=4b_{20}\xi^4+4(b_{11}-2)\xi^3\zeta-4b_{20}\xi^2\zeta^2-4b_{11}\xi\zeta^3+b_{10}\xi^5+b_{01}\xi^4\zeta-\\
&\quad-b_{10}\xi\zeta^4-b_{01}\zeta^5+\frac{b_{00}}{4}\xi^6+\frac{b_{00}}{4}\xi^4\zeta^2-\frac{b_{00}}{4}\xi^2\zeta^4-\frac{b_{00}}{4}\zeta^6,
\end{aligned}\tag{2}$$

где $(\xi^2+\zeta^2)^2d\rho=dt$, а во втором случае – к виду

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\gamma} &= -4\xi^2 - 2b_{10}\xi^2\zeta - 2b_{01}\xi\zeta^2 - \frac{b_{00}}{2}\xi^3\zeta - \frac{b_{00}}{2}\xi\zeta^3, \\
\frac{d\zeta}{d\gamma} &= \xi\zeta + b_{10}\xi^3 + b_{01}\xi^2\zeta - b_{10}\xi\zeta^2 - b_{01}\zeta^3 + \frac{b_{00}}{4}\xi^4 - \frac{b_{00}}{4}\zeta^4,
\end{aligned} \tag{3}
$$

где $(\xi^2 + \zeta^2)d\gamma = dt$, так как $b_{11} \neq 2$.

Для систем (2) и (3) двукратным линейным частным интегралом является

$$w_2 : (\xi, \zeta) \to \xi \quad \forall(\xi, \zeta) \in \mathbf{R}^2 .$$

Бесконечно удалённое состояние равновесия системы (1') соответствует состоянию равновесия $O^*(0,0)$ систем (2) и (3).

b_{01}	b_{00}	b_{11}	$A\left(0, -\frac{b_{00}}{b_{01}}\right)$	O^*	Атлас (рис.)
$\neq 0$	$\forall$	$\forall$	с-у	2п2э	1
$= 0$	$\neq 0$	< -1	—	6п4э2г	2
$= 0$	$\neq 0$	≥ -1	—	2п2э	3

В таблице указан вид изолированных состояний равновесия системы (1'). При этом использовались условные обозначения: «$\forall$» – любое; «с-у» – седло-узел; «2п2э» – сложное состояние равновесия, состоящее из двух эллиптических и двух сопровождающих их параболических секторов Бендиксона; «6п4э2г» – сложное состояние равновесия, состоящее из четырех эллиптических, шести сопровождающих их параболических и двух гиперболических секторов Бендиксона.

Поведение траекторий системы (1') с учетом расположения и характера ее состояний равновесия определяется однозначно. При этом учитывается отсутствие предельных циклов. Последнее следует уже из того, что все состояния равновесия системы (1') расположены на прямой-траектории $x = 0$.

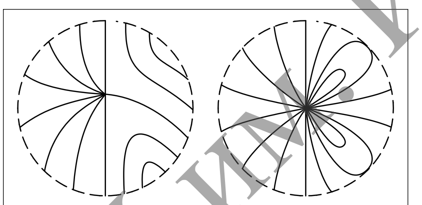

Рисунок 1

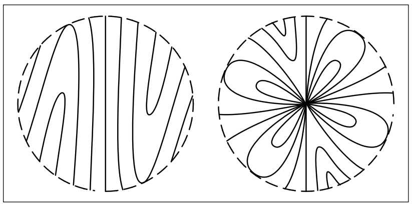

Рисунок 2

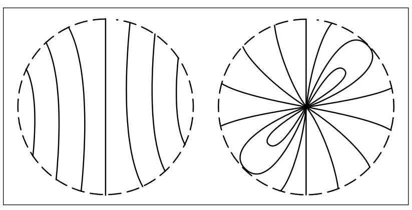

Рисунок 3

В таблице для каждого из случаев указаны номера рисунков, на которых построены атласы поведения траекторий системы (1') на сфере Бендиксона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирук, С.М. Качественное исследование систем с двукратным линейным частным интегралом / С.М. Бирук // Материалы Юбилейной науч.-практ. конф., Гомель, 11 июня 2009 г.: в 4 ч. / редкол.: О.М. Демиденко [и др.]. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2009. – Ч. 4. – С. 199–201.

2. Горбузов, В.Н. Траектории дифференциальных систем на сфере Бендиксона / В.Н. Горбузов, И.В. Королько, В.Ю. Тыщенко // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 4. – С. 15–19.