Е. М. ОВСИЮК[1], А. П. САФРОНОВ[1], А. В. ЧИЧУРИН[2]
[1]УО МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)
[2]Каталический университет Люблина (г. Люблин, Польша)

АТОМ ВОДОРОДА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Исследована известная система радиальных уравнений, описывающая релятивистский атом водорода на основе уравнения Дирака в пространстве постоянной кривизны Лобачевского. Выведено дифференциальное уравнение второго порядка с 6 регулярными особыми точками, построены его точные решения фробениусовского типа. Для получения правила квантования для значений энергии используется условие, выделяющее трансцендентные решения Фробениуса. Это позволяет найти в явном виде спектр энергий, который интерпретируется физически.

В пространстве Лобачевского H_3 уравнение Дирака с учетом кулоновского потенциала приводит к системе двух уравнений (см. обозначения в [1, 2]; радиальная координата обезразмерена делением на радиус кривизны ρ, $r \in (,\infty)$)

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{\nu}{\sinh r}\right) f + \left(E+\frac{e}{\tanh r}+m\right) g = 0, \quad \left(\frac{d}{dr}-\frac{\nu}{\sinh r}\right) g - \left(E+\frac{e}{\tanh r}-m\right) f = 0. \qquad (1)$$

Преобразуем систему (1) к новой переменной $\tanh\frac{r}{2}=z, z\in(0,1)$, в результате получим

$$\frac{d}{dz} f + \frac{\nu}{z} f + \left[\frac{e}{z}+\frac{-E-e-m}{z-1}+\frac{E-e+m}{z+1}\right] g = 0,$$

$$\frac{d}{dz} g - \frac{\nu}{z} g - \left[\frac{e}{z}+\frac{-E-e+m}{z-1}+\frac{E-e-m}{z+1}\right] f = 0.$$

Отсюда следует уравнение 2-го порядка для $f(z)$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}-2\frac{ez+E+m}{ez^2+2(E+m)z+e}\right]\frac{df}{dz} +$$

$$+\left[2\frac{2Ee^2-(E+m)\nu}{ez}+\frac{-(E+e)^2+m^2+\nu}{z-1}+\frac{(E-e)^2-m^2-\nu}{z+1}+\frac{e^2-\nu^2}{z^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(E+e)^2-m^2}{(z-1)^2}+\frac{(E-e)^2-m^2}{(z+1)^2}+\frac{2\nu[ez(E+m)+2(E+m)^2-e^2]}{e[ez^2+2(E+m)z+e]}\right] f = 0, \qquad (2)$$

оно имеет 6 особых точек (вводим обозначение $\frac{E+m}{e}=\sigma>0$):

$$0,\ \infty,\ \pm 1,\ z_{1,2}=-\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-1} \quad (z_1 z_2 = 1,\ z_1+z_2=-2\sigma).$$

Уравнение (2) может быть записано короче:

$$\frac{d^2 f}{dz^2}+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)\frac{df}{dz}+$$

$$+\left(\frac{C-D-2\sigma\nu}{z}-\frac{C-\nu}{z-1}+\frac{D-\nu}{z+1}+\frac{e^2-\nu^2}{z^2}+\frac{C}{(z-1)^2}+\frac{D}{(z+1)^2}+\frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2}\right)f=0,$$

где

$$A=2\nu\frac{\sigma z_1+2\sigma^2-1}{z_1-z_2},\ B=2\nu\frac{\sigma z_2+2\sigma^2-1}{z_2-z_1},\ C=(E+e)^2-m^2,\ D=(E-e)^2-m^2.$$

Около сингулярных точек $+1,-1,0$ решения ведут себя согласно:

$$f\sim(z-1)^{\alpha},\ \alpha=\pm\sqrt{-C};\quad f\sim(z+1)^{\beta},\ \beta=\pm\sqrt{-D};\quad f\sim z^{M},\ M=\pm\sqrt{\nu^2-e^2}.$$

Строим решения в виде $f(z)=x^M(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\varphi(z)$. Связанным состояниям могут соответствовать следующие значения параметров:

$$M=+\sqrt{\nu^2-e^2}\,,\quad \alpha=+\sqrt{m^2-(E+e)^2}\,,\qquad \beta=-\sqrt{m^2-(E-e)^2}\,.$$

В результате для функции $\varphi(z)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\left[\frac{2M+1}{z}+\frac{2\alpha+1}{z-1}+\frac{2\beta+1}{z+1}-\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right]\frac{d\varphi}{dz}+$$

$$+\left[\frac{C-D-(\alpha-\beta)(2M+1)-2\sigma(\nu+M)}{z}+\frac{M\left(z_1+2\sigma z_1 z_2+z_2\right)}{z\,z_2\,z_1}+\right.$$

$$+\frac{M+\alpha/2+\beta/2-C+\nu+2M\alpha+\alpha\beta}{z-1}-\frac{\alpha\left(1-z_1 z_2\right)}{\left(z-1\right)\left(z_1-1\right)\left(z_2-1\right)}-$$

$$-\frac{M+\alpha/2+\beta/2-D+\nu+2M\beta+\alpha\beta}{z+1}+\frac{\beta\left(1-z_1 z_2\right)}{\left(z+1\right)\left(z_1+1\right)\left(z_2+1\right)}+$$

$$\left.+\frac{1}{z-z_1}\left(A-\frac{\alpha}{z_1-1}-\frac{\beta}{z_1+1}-\frac{M}{z_1}\right)+\frac{1}{z-z_2}\left(B-\frac{\alpha}{z_2-1}-\frac{\beta}{z_2+1}-\frac{M}{z_2}\right)\right]\varphi=0\,.$$

Удобно воспользоваться сокращающими формулы обозначениями

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\left(\frac{P_1}{z}+\frac{P_2}{z-1}+\frac{P_3}{z+1}-\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)\frac{d\varphi}{dz}+\left(\frac{Q_1}{z}+\frac{Q_2}{z-1}+\frac{Q_3}{z+1}+\frac{Q_4}{z-z_1}+\frac{Q_5}{z-z_2}\right)\varphi=0\,.$$

Решения Фробениуса для $\varphi(z)$ строим в виде степенных рядов: $\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}d_n z^n$, находим 6-членные рекуррентные соотношения:

$$k\geq 4,\qquad \left(Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+Q_5\right)d_{k-4}+$$

$$+\left[(k-3)(k-4)+\left(P_1+P_2+P_3-2\right)(k-3)+\right.$$

$$\left.+\left(-Q_1-Q_2-Q_3-Q_5\right)z_1+\left(-Q_1-Q_2-Q_3-Q_4\right)z_2+Q_2-Q_3\right]d_{k-3}+$$

$$+[(-z_1-z_2)(k-2)(k-3)+\{(1-P_1-P_2-P_3)z_1+(1-P_1-P_2-P_3)z_2+P_2-P_3\}(k-2)+$$

$$\left.+Q_3\,z_1\,z_2+Q_2\,z_1\,z_2+Q_3\,z_2-Q_1-Q_4-Q_5+Q_1\,z_1\,z_2+Q_3\,z_1-Q_2\,z_2-Q_2\,z_1\right]d_{k-2}+$$

$$+[(z_1z_2-1)(k-1)(k-2)+(2-P_1-P_2z_1+P_3z_2+P_2z_1z_2+P_1z_1z_2+P_3z_1z_2+$$

$$+P_3z_1-P_2z_2)(k-1)+Q_1\,z_2+Q_2\,z_1\,z_2+Q_5\,z_1+Q_1\,z_1-Q_3\,z_1\,z_2+Q_4\,z_2]d_{k-1}+$$

$$+[(z_1+z_2)\,k\,(k-1)+(-z_1-z_2+P_1\,z_1-P_3\,z_1\,z_2+P_1\,z_2+P_2\,z_1\,z_2)k-Q_1\,z_1\,z_2]\,d_k+$$

$$+\left[-z_1\,z_2\,(k+1)k-P_1\,z_1\,z_2\,(k+1)\right]d_{k+1}=0. \qquad (3)$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применяем метод Пуанкаре-Перрона. Возможны следующие радиусы сходимости:

$$R_{\text{conv}} = \left|\frac{1}{R}\right| = +1, +\infty, |z_1|, |z_2|.$$

Обращаясь к рекуррентным соотношениям (3), убеждаемся, что коэффициент при d_{k-4} обращается в нуль, это означает, что в (3) имеем фактически 5-членное рекуррентное соотношение.

В качестве правила квантования применим условие трансцендентности решений Фробениуса:

$$S_{k-3} = 0, \quad k \geq 3, \qquad (k-3)(k-4) + \left(P_1 + P_2 + P_3 - 2\right)(k-3) +$$

$$+\left(-Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_5\right)z_1 + \left(-Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4\right)z_2 + Q_2 - Q_3 = 0.$$

С учетом явного вида коэффициентов возникают два альтернативных уравнения:

$$\sqrt{m^2 - (E+e)^2} - \sqrt{m^2 - (E-e)^2} + n = 0; \tag{4}$$

$$\sqrt{m^2 - (E+e)^2} - \sqrt{m^2 - (E-e)^2} + n + \sqrt{\nu^2 - e^2} + \sqrt{\nu^2 - e^2} = 0. \tag{5}$$

В уравнение (4) не входит параметр $\nu = j + 1/2$, наиболее интересный случай (5):

$$\sqrt{m^2 - E^2 - e^2 + 2eE} - \sqrt{m^2 - E^2 - e^2 - 2eE} = n + 2\sqrt{\nu^2 - e^2} = 2N > 0.$$

Он дает формулу для уровней энергии

$$E = m\sqrt{\frac{1-(e^2+N^2)/m^2}{1+\frac{e^2}{N^2}}}, \quad N = \frac{n}{2} + \sqrt{\nu^2 - e^2}. \tag{6}$$

Найденный спектр похож на спектр для скалярной частицы, известный из решения уравнения Клейна-Фока-Гордона с учетом кулоновского поля на фоне пространства Лобачевского [1, 2].

Существует ограничение: выражение под корнем в (6) должно быть положительным:

$$1 - \frac{e^2}{m^2} - \frac{N^2}{m^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(e^2 + N^2\right)\frac{\hbar^2}{m^2 c^2 \rho^2} < 1;$$

приводим вид этого уравнения также в обычных единицах измерения. Последнее неравенство означает, что число связанных состояний для частицы со спином 1/2 в пространстве Лобачевского конечно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Red'kov, V. M. Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V. M. Red'kov, E. M. Ovsiyuk. – Nova Science Publishers. Inc., New York, 2012. – 434 p.

2. Овсиюк, Е. М. Точно решаемые задачи квантовой механики и классической теории поля в пространствах с неевклидовой геометрией / Е. М. Овсиюк. – Минск : РИВШ, 2013. – 406 с.