Е. М. ОВСИЮК[1], А. Д. КОРАЛЬКОВ[1], Я. А. ВОЙНОВА[2]
[1]УО МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)
[2]Институт физики НАН Беларуси (г. Минск, Беларусь)

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ СКАЛЯРНАЯ ЧАСТИЦА С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ ДАРВИНА–КОКСА ВО ВНЕШНЕМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Обобщенное уравнение Шредингера для частицы со структурой Дарвина–Кокса, учитывающее распределение заряда частицы по сфере конечного радиуса, исследуется с учетом внешнего кулоновского поля. Опуская технические детали, касающиеся общей структуры обобщенного уравнения Шредингера для частицы Дарвина–Кокса [1, 2], и вычисления, связанные с разделением переменных, начнем с явного вида получаемого радиального уравнения ($l = 0, 1, 2, ...$):

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\left[-\frac{4x^3}{x^4+\Gamma^2}+\frac{6}{x}\right]\frac{dR}{dx}+\left[2\varepsilon+\frac{2\alpha}{x}-\frac{l(l+1)}{x^2}+\frac{4\Gamma}{x^3}+\frac{\Gamma^2(2\varepsilon-1)}{x^4}+\frac{2\alpha\Gamma^2}{x^5}-\frac{\Gamma^2 l(l+1)}{x^6}-\frac{4x\Gamma}{x^4+\Gamma^2}\right]R=0, \qquad (1)$$

здесь все величины безразмерные (Γ – параметр Кокса):

$$\varepsilon=\frac{E}{mc^2}, \quad r\frac{mc}{\hbar}=x, \quad \frac{1}{mc^2}\frac{e^2}{r}=\frac{\alpha}{x}, \quad \alpha=\frac{e^2}{\hbar c}=\frac{1}{137}, \quad \gamma\frac{m^2c^2}{\hbar^2}=\Gamma .$$

В (1) имеем уравнение с 4 регулярными особыми точками:

$$\{ r_1, r_2, r_3, r_4 \} = \{ e^{+i\pi/4}\sqrt{\Gamma}, \quad -e^{+i\pi/4}\sqrt{\Gamma}, \quad e^{-i\pi/4}\sqrt{\Gamma}, \quad -e^{-i\pi/4}\sqrt{\Gamma} \}$$

и двумя нерегулярными точками (ограничимся значениями $l = 1, 2, \dots$): $x = 0, \mathrm{Rang} = 3, x = \infty, \mathrm{Rang} = 2.$ Около регулярных особых точек решения имеют простой вид

$$r \to +\sigma, \quad R \sim (r-\sigma)^{\rho}, \quad \rho = 0, 2\,; \quad r \to -\sigma, \quad R \sim (r+\sigma)^{\rho}, \quad \rho = 0, 2\,;$$

$$r \to +i\sigma, \quad R \sim (r-i\sigma)^{\rho}, \quad \rho = 0, 2\,; \quad r \to -i\sigma, \quad R \sim (r+i\sigma)^{\rho}, \quad \rho = 0, 2\,. \tag{2}$$

Решения Фробениуса уравнения (1) строим в виде: $R(r) = e^{Ax} x^{C} e^{B/x} e^{D/x^2} f(r).$ Чтобы описывать связанные состояния, для коэффициентов должны выбирать следующие значения (пусть $L = \sqrt{l(l+1)}, \varepsilon < 0$):

$$\Gamma > 0, \qquad A = -\sqrt{-2\varepsilon}, \quad D = -\frac{\Gamma L}{2}, \quad B = \frac{\alpha\Gamma}{L}, \quad C = -\frac{3}{2} - \Gamma\,\frac{\alpha^2 / L^2 - 1 + 2\varepsilon}{2L};$$

$$\Gamma < 0, \qquad A = -\sqrt{-2\varepsilon}, \quad D = +\frac{\Gamma L}{2}, \quad B = -\frac{\alpha\Gamma}{L}, \quad C = -\frac{3}{2} + \Gamma\,\frac{\alpha^2 / L^2 - 1 + 2\varepsilon}{2L}.$$

Кратко структуру уравнения для $f(x)$ можно представить так:

$$f'' + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} - \frac{4x^3}{x^4 + \Gamma^2}\right) f' + \left(\frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \frac{c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0}{x^4 + \Gamma^2}\right) f = 0.$$

Выпишем коэффициенты $a_{0,1,2,3}$, $b_{1,2,3}$, $c_{0,1,2,3}$ явно для случая $\Gamma > 0$:

$$a_0 = -\sqrt{-8\varepsilon}, \qquad a_1 = 3 - \Gamma\,\frac{\alpha^2 / L^2 - 1 + 2\varepsilon}{L}, \qquad a_2 = -\frac{2\alpha\Gamma}{L}, \qquad a_3 = 2\Gamma L,$$

$$b_1 = -3\sqrt{-2\varepsilon} + 2\alpha + \Gamma\sqrt{-2\varepsilon}\left(\frac{-1 + 2\varepsilon}{L} + \frac{\alpha^2}{L^3}\right),$$

$$b_2 = -\frac{21}{4} - L^2 + \frac{\Gamma(2\sqrt{-2\varepsilon}\alpha - 2\varepsilon + 1)}{L} + \frac{\Gamma^2(1/4 - \varepsilon + \varepsilon^2)}{L^2} - \frac{\Gamma\alpha^2}{L^3} + \frac{\Gamma^2\alpha^2(-1/2 + \varepsilon)}{L^4} + \frac{1}{4}\frac{\Gamma^2\alpha^4}{L^6},$$

$$b_3 = -2\sqrt{-2\varepsilon}\,\Gamma L + 4\Gamma - \frac{\alpha\Gamma}{L} + \frac{\Gamma^2\alpha(2\varepsilon - 1)}{L^2} + \frac{\Gamma^2\alpha^3}{L^4},$$

$$c_0 = -4\Gamma L, \;\; c_1 = -4\Gamma + \frac{4\alpha\Gamma}{L}, \;\; c_2 = 6 + \frac{2\Gamma(\alpha^2 / L^2 - 1 + 2\varepsilon)}{L}, \;\; c_3 = 4\sqrt{-2\varepsilon}\,.$$

Для случая отрицательного $\Gamma < 0$ выражения аналогичные, но с заменой Γ на $-\Gamma$.

Строим решения в виде степенных рядов, приходим к 8-членным рекуррентным соотношениям:

$$n = 8, 9, 10\dots$$

$$[a_0(n-6) + b_1 + c_3]d_{n-6} + [(n-5)(n-6) + a_1(n-5) - 4(n-5) + b_2 + c_2]d_{n-5} +$$
$$+[a_2(n-4) + b_3 + c_1]d_{n-4} + [a_3(n-3) + c_0]d_{n-3} + [a_0\Gamma^2(n-2) + b_1\Gamma^2]d_{n-2} +$$
$$+[\Gamma^2(n-1)(n-2) + a_1\Gamma^2(n-1) + b_2\Gamma^2]d_{n-1} + [a_1\Gamma^2 n + b_3\Gamma^2]d_n + a_3\Gamma^2(n+1)d_{n+1} = 0. \tag{3}$$

Исследуем сходимость ряда по методу Пуанкаре–Перрона, возможны следующие радиусы сходимости: $R_{conv} = +\infty, |\Gamma|$. Поскольку на границе круга радиусом $|\Gamma|$ поведение решений вполне регулярное (см. (2), нас интересует сходимость ряда только в положительной области вещественной переменной x), то можно полагать, что степенной ряд сходится во всей области от нуля до бесконечности.

Можно легко убедиться в том, что оставаясь в физической области значений параметра энергии (вещественных отрицательных значений близких к нулю $\varepsilon < 0, \varepsilon > -5 \cdot 10^{-6}$, эту область легко установить, анализируя случай обычной частицы при $\Gamma = 0$), невозможно построить точных решений полиномов. Для этого нужно, чтобы первые 7 коэффициентов при $d_{n-6} = 0$, …, d_n обратились одновременно в ноль, тогда $d_{n+1} = 0$, что обеспечило бы обрыв ряда до полинома. Попытка выделить среди точных решений Фробениуса некоторые нужные значения энергии, вводя малые добавки к невозмущенным уровням энергии при $\Gamma = 0$ дала немного: мы устойчиво получаем решения либо без нулей (такие решения могут соответствовать основному связанному состоянию), либо только с одним нулем.

Существует специальное (аналитическое) правило квантования, которое выделяет из всех решений подкласс так называемых трансцендентных функций. Для этого нужно положить равным нулю коэффициент из рекуррентных формул (3) при d_{n-6}:

$$n \geq 6, \quad [a_0(n-6) + b_1 + c_3] = 0. \tag{4}$$

В явном виде при $\Gamma < 0$ условие (4) примет вид

$$-2\sqrt{-2\varepsilon}\,(n-6) + \sqrt{-2\varepsilon} + 2\alpha + \Gamma\sqrt{-2\varepsilon}\left(\frac{1 - 2\varepsilon}{L} - \frac{\alpha^2}{L^3}\right) = 0. \tag{5}$$

Введем обозначение $\Lambda = \sqrt{-2\varepsilon}$, тогда (5) запишется так:

$$-2\Lambda(n-6)+\Lambda+2\alpha+\Gamma\Lambda\left(\frac{1+\Lambda^2}{L}-\frac{\alpha^2}{L^3}\right)=0.$$

При $\Gamma>0$ получим уравнение

$$-2\Lambda(n-6)+\Lambda+2\alpha-\Gamma\Lambda\left(\frac{1+\Lambda^2}{L}-\frac{\alpha^2}{L^3}\right)=0.$$

Уравнения различаются только знаком при Γ. Коротко они записываются так (верхний знак относится к случаю $\Gamma>0$, нижний – к $\Gamma<0$)

$$\Lambda^3+p\Lambda+q=0,\quad p=1\pm(2k-1)\frac{L}{\Gamma}-\frac{\alpha^2}{L^2},\quad q=\pm\frac{2\alpha}{\Gamma}.$$

Корни должны удовлетворять ограничениям

$$\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3=0,\qquad \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3=-q=\mp\frac{2\alpha}{\Gamma}.$$

Корни уравнения можно представить в виде

$$\Lambda_2=-\frac{1}{12}\frac{A^{2/3}-12p}{A^{1/3}}+i\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{A^{2/3}+12p}{A^{1/3}},\quad \Lambda_3=-\frac{1}{12}\frac{A^{2/3}-12p}{A^{1/3}}-i\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{A^{2/3}+12p}{A^{1/3}},$$

$$\Lambda_1=\frac{1}{6}\frac{A^{2/3}-12p}{A^{1/3}},$$

где использовано обозначение

$$A=108\left(-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}\right).$$

Можно отметить, что при A>0 корни Λ_2, Λ_3 будут комплексно сопряженными, корень Λ_1 будет вещественным положительным, он соответствует физически интерпретируемому случаю. Анализ получающегося таким способом спектра и поведение соответствующих решений будут выполнены в отдельной работе.

Можно выполнить качественный анализ дифференциального уравнения. Для этого возвратимся к уравнению (1) и исключим в нем член с первой производной:

$$R=\varphi\bar{R},\quad \varphi(x)=\frac{\sqrt{x^4+\Gamma^2}}{x^3},\quad \left(\frac{d^2}{dx^2}+P^2(x)\right)\bar{R}=0,$$

где функция $P^2(x)$ – эффективный квадрат импульса. Его асимптотики около двух физических особенностей следующие:

$$x\to 0,\quad P^2(x)\approx-\frac{\Gamma^2 l(l+1)}{x^6}\to-\infty;\qquad x\to\infty,\quad P^2(x)\approx 2\varepsilon+\frac{2\alpha}{x}+\ldots>2\varepsilon.$$

Численный анализ поведения кривой $P^2(x)$ для физического интервала значений энергии (при фиксированном l) показывает, что в широком диапазоне значений параметра Кокса $\gamma\sim 10^{-8}-10^{-2}$ кривая $P^2(x)$ имеет две точки пересечения $x_2>x_1>0$ с осью x и один положительный локальный максимум внутри интервала $[x_1,x_2]$. Это характерно для квантово-механических задач с потенциальной ямой и дискретным спектром энергий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox, W. Higher-rank representations for zero-spin field theories / W. Cox // J. Phys. Math. Gen. – 1982. – Vol. 15, № 2. – P. 627–635.
2. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol II. Physical Problems / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko, Y. A. Voynova, V. Balan, V. M. Red'kov. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2018. – 402 p.