А. В. ИВАШКЕВИЧ[1], Е. М. ОВСИЮК[1], В. М. РЕДЬКОВ[2]
[1]УО МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)
[2]Институт физики НАН Беларуси (г. Минск, Беларусь)

О ЯВНОМ ВИДЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2, МАССИВНЫЙ И БЕЗМАССОВЫЙ СЛУЧАИ

Цель работы – изложить в доступной форме основные сведения о релятивистском уравнении, описывающем частицу со спином 3/2. Сначала рассмотрим случай частицы с ненулевой массой. В базисе Рариты–Швингера уравнение для 16-компонентной волновой функции (вектор-биспинора относительно группы Лоренца) имеет вид [1]–[3]

$$(\gamma^a \partial_a + iM)\Psi_c - \frac{1}{3}(\gamma^b \partial_c + \gamma_c \partial^b)\Psi_b + \frac{1}{3}\gamma_c(\gamma^a \partial_a - iM)\gamma^b \Psi_b = 0\,. \tag{1}$$

Потребуются формулы для матриц Дирака:

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2g^{ab}, \quad \gamma^a\gamma_a = 4\,, \quad \gamma^a\gamma^b\gamma^d = \gamma^a g^{bd} - \gamma^b g^{ad} + \gamma^d g^{ab} + i\gamma^5 \varepsilon^{abdc}\gamma_c\,, \tag{2}$$

где использованы полностью антисимметричный тензор Леви-Чивита и матрица γ^5: $\varepsilon^{0123} = +1, \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Исходя из уравнений (1) можно получить некоторые дополнительные условия на компоненты волновой функции $\Psi_a(x)$. Так, умножим уравнение (1) слева на матрицу γ^c, после простых преобразований этот дает

$$\partial_b \Psi^b = \frac{iM}{2}\gamma_b \Psi^b, \tag{3}$$

это первое дополнительное условие. Теперь подействуем на уравнение (1) оператором ∂^c

$$iM\ \partial^c\Psi_c+\gamma^a\partial_a\left(\frac{2}{3}\partial^c\Psi_c-\frac{iM}{3}\gamma^c\Psi_c\right)=0\,, \tag{4}$$

это второе дополнительное условие. Если воспользоваться первым дополнительным условием (3), то из (4) следует

$$iM\ \partial^c\Psi_c+\gamma^a\partial_a\left(\frac{2}{3}\frac{iM}{2}\gamma^c\Psi_c-\frac{iM}{3}\gamma^c\Psi_c\right)=0\quad\Rightarrow\quad\partial^c\Psi_c=0\quad(M\neq 0), \tag{5}$$

и значит, первое дополнительно условие дает

$$\gamma_b\Psi^b=0. \tag{6}$$

При учете соотношений (5) и (6) исходное уравнение значительно упрощается и принимает вид уравнения Дирака для вектор-биспинора (приводим здесь же и два дополнительных условия)

$$(i\gamma^a\partial_a-M)\Psi_c=0\,,\quad\partial^c\Psi_c=0,\quad\gamma^c\Psi_c=0. \tag{7}$$

Случай безмассовой частицы значительно отличается от массивного. В исходном уравнении нужно положить $M=0$:

$$\gamma^a\partial_a\Psi_c-\frac{1}{3}(\gamma^b\partial_c+\gamma_c\partial^b)\Psi_b+\frac{1}{3}\gamma_c\gamma^a\partial_a\gamma^b\Psi_b=0\,. \tag{8}$$

При этом в качестве первого дополнительного условия получим $\partial_b\Psi^b=0.$ Второе дополнительно условие (4) запишется так: $\gamma^a\partial_a\partial^c\Psi_c=0$, что эквивалентно предыдущему условию. Таким образом, уравнение в безмассовом случае (8) можно представить так (рядом приводим и дополнительное уравнение):

$$\gamma^a\partial_a\Psi_c-\frac{1}{3}\gamma^b\partial_c\Psi_b+\frac{1}{3}\gamma_c\gamma^a\gamma^b\partial_a\Psi_b=0,\quad\partial_b\ \Psi^b. \tag{9}$$

Это уравнение можно преобразовать к виду, когда становится очевидным существование в теории безмассовой частицы калибровочной симметрии. Будем исходить из уравнения для безмассовой частицы, записанном в матричной форме

$$\Gamma^a\partial_a\Psi=0\,,\quad\Psi=(\Psi_l), \tag{10}$$

где действующие в 16-мерном пространстве матрицы Γ^a задаются соотношением (биспинорные индексы у матрицы не пишем)

$$(\Gamma^a)_k{}^l=\gamma^a\delta_k^l-\frac{1}{3}\gamma^l\delta_k^a-\frac{1}{3}\gamma_k g^{al}+\frac{1}{3}\gamma_k\gamma^a\gamma^l. \tag{11}$$

Совершим над уравнением (10) последовательно два преобразования: сначала умножим его слева на неособенную матрицу C, а затем перейдем к новому представлению волновой функции с помощью матрицы S:

$$\Gamma^a\ \Rightarrow\ \Gamma'^a=C\,\Gamma^a\quad\Rightarrow\quad\tilde{\Gamma}^a=S\,\Gamma'^a\,S^{-1}\,,\ \tilde{\Psi}=S\,\Psi\,. \tag{12}$$

Будем использовать матрицы C и S следующего вида:

$$C_a{}^b=\delta_a^b+c\gamma_a\gamma^b\,,\quad S_a{}^b=\delta_a^b+a\gamma_a\gamma^b\,, \tag{13}$$

$$(S^{-1})_a{}^b=\delta_a^b+b\gamma_a\gamma^b\,,\quad a+b+4ab=0\,. \tag{14}$$

Величины a,b,c – пока произвольные параметры; уравнение для a и b получено из соотношения $S\,S^{-1}=I$. В соответствии с (12) и (14) вычисляем Γ'^a и $\tilde{\Gamma}^a$

$$(\Gamma'^a)_k{}^l=\left[\ \gamma^a\ \delta_k^l-\frac{1}{3}\gamma^l\ \delta_k^a+\left(2c-\frac{1}{3}\right)\gamma_k\ g^{al}+\frac{1}{3}\gamma_k\ \gamma^a\ \gamma^l\ \right],$$

$$(\tilde{\Gamma}^a)_k{}^l=\gamma^a\delta_\rho^l\left\{1-\left[\frac{b+1}{3}+b\left(\frac{2c-1}{3}(1+4a)+2a\right)\right]\right\}+\gamma^l\delta_k^a\left\{\frac{2b-1}{3}+\left[\frac{b+1}{3}+b\left(\frac{2c-1}{3}(1+4a)+2a\right)\right]\right\}+$$

$$+\gamma_k g^{al}\left\{[(2c-1)\frac{1+4a}{3}+2a]+\left[\frac{b+1}{3}+b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3}+2a\right)\right]\right\}+i\gamma^5\varepsilon_k^{als}\gamma_s\left[\frac{b+1}{3}+b((2c-1)\frac{1+4a}{3}+2a)\right]. \tag{15}$$

Параметры a,b,c пока не фиксированы. Пробуем, выбирая параметры (a,b,c), добиться того, чтобы в выражении для $\tilde{\Gamma}^a$ все члены, за исключением содержащего символ Леви-Чивита, обратились в ноль. Для этого должны выполняться три равенства:

$$a+b+4ab=0,\ 1-\left[\frac{b+1}{3}+b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3}+2a\right)\right]=0,$$

$$\frac{2b+1}{3}+\left[\frac{b+1}{3}+b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3}+2a\right)\right]=0\,,$$

$$(1+4a)\frac{2c-1}{3}+2a+\left[\frac{b+1}{3}+b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3}+2a\right)\right]=0.$$

Эта система уравнений решается следующим образом: из третьего уравнения, учитывая второе, находим $b=-1$, затем из первого уравнения получаем $a=-1/3$, после чего из третьего имеем $c=+2$. Легко убедиться, что этот набор значений

$$a=-\frac{1}{3}, \quad b=-1, \quad c=+2 \tag{16}$$

удовлетворяет четвертому уравнению. Таким образом, в результате преобразования

$$S_k{}^l=\delta_k^l-\frac{1}{3}\gamma_k\gamma^l, \quad \tilde{\Psi}_k=S_k{}^l\Psi_l \tag{17}$$

для матрицы $\tilde{\Gamma}^a$ получаем выражение

$$(\tilde{\Gamma}^a)_k{}^l=+i\,\gamma^5\varepsilon_k{}^{als}\gamma_s\,. \tag{18}$$

Таким образом, уравнение для безмассового поля со спином $3/2$ можем представить в виде

$$\gamma^a(\tilde{\Gamma}^a)_l{}^k\tilde{\Psi}_l(x)=0 \quad\Rightarrow\quad i\,\gamma^5\varepsilon_k{}^{nal}\gamma_n\partial_a\tilde{\Psi}_l(x)=0\,, \tag{19}$$

или (множитель $i\gamma^5$ можно опустить):

$$\varepsilon^{abkl}\,\gamma_b\partial_k\tilde{\Psi}_l=0. \tag{20}$$

Очевидно, что вектор-биспинор в виде градиента от произвольного биспинора $\Phi(x)$

$$\tilde{\Psi}_l^{grad}(x)=\frac{\partial}{\partial x^l}\Phi(x) \tag{21}$$

всегда будет решением уравнения (19)–(20). Это свойство иначе называют калибровочной симметрией уравнения безмассовой частицы со спином 3/2: все решения определены с точностью до градиента от произвольного биспинора. В исходном базисе решения градиентного типа представляются в виде

$$\Psi_l^{grad}(x)=(\delta_l{}^k-\gamma_l\gamma^k)\frac{\partial}{\partial x^l}\Phi(x). \tag{22}$$

Уравнение (19)–(20) при его внешней простоте довольно сложное. С использованием обозначений

$$(\gamma^i)=(-\gamma_i)=\vec{\gamma}, \quad \psi_0, \quad (\tilde{\psi}^i)=(-\tilde{\Psi}_i)=\vec{\Psi}$$

его можно представить с использованием операций векторного произведения, дивергенции и градиента так:

$$\vec{\gamma}\,(\operatorname{div}\vec{\psi})=0, \quad \partial_0(\vec{\gamma}\times\vec{\Psi})=\gamma_0(\nabla\times\vec{\Psi})+(\vec{\gamma}\times\nabla)\Psi_0\,. \tag{23}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. Schwinger // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 60, no 1. – P. 61–64.