М. С. ЖУК, М. И. ЕФРЕМОВА, А. А. ЛАРКИНА
УО МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ФОРМИРОВАНИЕ КЛЮЧЕВЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ПРИЛОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ГЕОМЕТРИИ»

Формирование компетенций, которыми должен овладеть школьник в процессе обучения, предполагает, на наш взгляд, прежде всего использование практико-ориентированности в обучении как одной из важнейших составляющих развития образования в настоящий момент. Именно от того, насколько учитель обеспечивает своевременную ориентированность обучения на нужды практики, участвует в научных исследованиях в своей области и привлекает к этим исследованиям учащихся профильных классов, владеет современной методологией организации учебного процесса, умеет вовремя ориентировать учащегося на ликвидацию имеющихся пробелов в знаниях, во многом зависит уровень подготовки учащихся.

Понятие числа прошло длительный путь исторического развития и является основным понятием математики. Интерес к изучению чисел возник у людей в глубокой древности. Его содержание пытались выяснить крупнейшие математики всех времен. Понятие комплексного числа обогащает и завершает одну из основных идей школьной математики – идею обобщения понятия числа. Знание комплексных чисел позволяет учащимся усвоить многие разделы школьной программы.

Комплексные числа широко используются в математике и ее приложениях. Особенно часто применяются функции комплексного переменного, они используются в механике, аэро- и гидродинамике, в алгебраической и неевклидовых геометриях, теории чисел. Весь этот обширный материал, конечно, не может быть представлен учащимся для изучения, однако некоторые вопросы могут быть изучены в школе на факультативных занятиях, а это расширит представления учащихся и об аппарате комплексных чисел и о методах математического исследования.

Аппарат комплексных чисел является хорошим аналитическим средством для решения различных геометрических задач. Метод комплексных чисел позволяет решать планиметрические задачи прямым вычислением по готовым формулам. Выбор этих формул с очевидностью диктуется условием задачи и ее требованием. В этом состоит простота этого метода по сравнению с координатным, векторным и другими методами. Применение комплексных чисел позволяет проще и изящнее решать многие известные задачи, а также дает возможность обнаружить новые факты и делать обобщения.

Приведем некоторые задачи, предлагаемые учащимся на факультативном занятии в старших классах с математическим профилем.

Задача 1. Из точки окружности опущены перпендикуляры на прямые, содержащие стороны и диагонали вписанного в нее четырехугольника. Доказать, что произведения длин перпендикуляров, опущенных на противоположные стороны, и произведение длин перпендикуляров, опущенных на диагонали, равны.

Доказательство: пусть данная окружность имеет уравнение $z\bar{z} = 1$. Пусть $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0$ – ортогональные проекции точки $M(m)$ окружности соответственно на прямые AB, BC, CD, DA, AC, BD. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(a + b + m - \frac{ab}{m}\right),\ \ c_0 = \frac{1}{2}\left(c + d + m - \frac{cd}{m}\right).$$

Находим:

$$MA_0^2 \cdot MC_0^2 = (m - a_0)(\bar{m} - \bar{a}_0)(m - c_0)(\bar{m} - \bar{c}) =$$

$$= \frac{(m-a)(m-b)}{2m} \cdot \frac{(a-m)(b-m)}{2abm} \cdot \frac{(m-c)(m-d)}{2m} \cdot \frac{(c-m)(d-m)}{2cdm}$$

$$= \frac{\big((m-a)(m-b)(m-c)(m-d)\big)^2}{16m^4abcd}.$$

Симметричность этого выражения относительно a, b, c, d говорит о том, что ему также равны произведения $MB_0^2 \cdot MD_0^2$ и $ME_0^2 \cdot MF_0^2$.

Задача 2. Из основания высоты треугольника опущены перпендикуляры на две стороны, не соответственные этой высоте (рисунок 1). Доказать, что расстояние между основаниями этих перпендикуляров не зависит от выбора высоты треугольника.

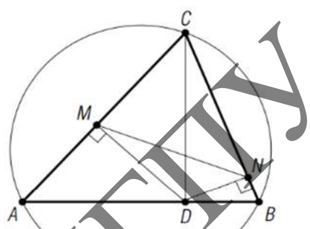

Рисунок 1

Доказательство: пусть дан треугольник ABC (рисунок 1), причем описанная около него окружность имеет уравнение $z\bar{z} = 1$. Если CD – высота треугольника, то $d = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{ab}{c}\right)$. Комплексные координаты оснований M и N перпендикуляров, опущенных из точки D на AC и BC соответственно, равны $m = (a + c + d - ac\bar{d})/2$ и

$n = (b + c + d - bc\bar{d})/2.$

Находим:

$$m - n = \frac{1}{2}\left(a - b + c\bar{d}(b - a)\right) = \frac{1}{2}(a - b)\left(a - c\bar{d}\right) == \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{4ab}.$$

Так как $|a| = |b| = 1$, то $|m - n| = |(a - b) \times (b - c)(c - a)|/4$. Это выражение симметрично относительно a, b, c, т. е. расстояние MN не зависит от выбора высоты треугольника.

Рисунок 2

Задача 3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат вне треугольника. Найти расстояние от вершины C прямого угла, до центра Q квадрата, если длины катетов BC и AC равны, соответственно, a и b.

Решение: примем точку C за начальную (рисунок 2), а прямые CA и CB за действительную и мнимую оси. Тогда точки A и B будут иметь соответственно комплексные координаты b и ai, причём $b = \bar{b}$ и $a = \bar{a}$.

При повороте на 90° вектор $\overrightarrow{QB}$ переходит в вектор $\overrightarrow{QA}$. Поэтому имеем равенство

$$(ai - q)i = b - q,$$

где q – координата точки Q. Отсюда $q = \frac{a+b}{1-i}$.

Находим:

$$CQ^2 = q\bar{q} = \frac{a+b}{1-i} \cdot \frac{a+b}{1+i} = \frac{1}{2}(a+b)^2, CQ = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Изучение комплексных чисел на факультативных занятиях в старших классах с математическим профилем вместе с их приложениями к вопросам геометрии повысит уровень математической подготовки учащихся, обогатит их новыми знаниями, необходимыми им в дальнейшем, как для успешного изучения смежных дисциплин, так и для практической деятельности после окончания школы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понарин, Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах : книга для учащихся мат. классов школ, учителей и студентов пед. вузов / Я. П. Понарин. – М. : МЦНМО, 2004. – 160 с.