УДК 517.917

В.В. Шкут

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИМЕЮЩЕЙ ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВИДЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Пусть для системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} a_{ij} x^i y^j, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} b_{ij} x^i y^j, \qquad (1)$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, кривая (см.[1])

$$\omega(x,y) \equiv (x^2 + y^2 + p^2)^2 - 4d^2(x^2 + p^2) = 0, 0 < p < 2d \qquad (2)$$

является частным интегралом. Заметим, что если $p = 2d$, то кривая (2) вырождается в точку (0;0).

Теорема. Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{01}y + \frac{a_{01}}{p^2}x^2y - \frac{a_{01}+2b_{10}}{p^2-4d^2}y^3 \equiv P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= b_{10}x + \frac{2d^2a_{01}+p^2b_{10}}{p^2(p^2-4d^2)}x^3 + \frac{2(p^2-d^2)a_{01}+3p^2b_{10}}{p^2(p^2-4d^2)}xy^2 \equiv Q(x,y). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Для доказательства этой теоремы следует воспользоваться равенством [2]: если кривая $\omega(x,y)=0$ - частный интеграл системы, то

$$\omega_x^{©}\cdot P + \omega_y^{©}\cdot Q = \omega\cdot F, \qquad (4)$$

где, в данном случае, F - многочлен второй степени относительно x и y.

Сделав в системе (3) замену времени $\dfrac{dt}{p^2(p^2-4d^2)} \to dt$,

получим для дальнейшего исследования систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p^2(p^2-4d^2)a_{01}y + a_{21}x^2y + a_{03}y^3 \equiv P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= p^2(p^2-4d^2)b_{10}x + b_{30}x^3 + b_{12}xy^2 \equiv Q(x,y) \end{aligned}\right\}, \qquad (5)$$

где

$$a_{21} = (p^2-4d^2)a_{01},\ a_{03} = -p^2(a_{01}+2b_{10}),$$
$$b_{30} = 2d^2a_{01} + p^2b_{10},\ b_{12} = 2(p^2-d^2)a_{01} + 3p^2b_{10}.$$

Видим, что поле направлений системы (5) симметрично относительно обеих осей координат. Далее, если $(p^2-2d^2)a_{01} + p^2b_{10} = 0$, то (5) будет системой Гамильтона и общий интеграл уравнения траекторий будет иметь вид

$$(x^2+y^2)^2+2(p^2-2d^2)x^2+2p^2y^2=„.$$

Если $„=p^2(4d^2-p^2)$, то получим кривую (2). Легко показать, что если $2d^2-p^2 \le 0$, то в конечной части плоскости система Гамильтона имеет единственную особую точку (0;0) - центр, если $2d^2-p^2>0$, то система имеет особые точки (0;0) - седло и ($\pm\sqrt{2d^2+p^2}$;0) центры. В бесконечной части плоскости система Гамильтона особых точек не имеет. Дальше исследование системы (5) проводим при условии, что $(p^2-2d^2)a_{01}+p^2b_{10} \neq 0$. В данном случае находится общий интеграл уравнения траекторий системы (5). Для этого в системе (5) делаем замену переменных x и y по формулам $x^2=u$, $y^2=v$ и переходим к уравнению

$$\frac{dv}{du} = \frac{p^2(p^2-4d^2)b_{10} + b_{30}u + b_{12}v}{p^2(p^2-4d^2)a_{01} + a_{21}u + a_{03}v},$$

которое приводится к однородному уравнению первого порядка ([см.3]). Интегрируя это уравнение и переходя к переменным x и y, получим общий интеграл уравнения траекторий системы (5) в виде

$\omega_1(x,y) = c\omega_2^2(x,y)$, где $\omega_1(x,y) = b_{30}x^2 - a_{03}y^2 - b_{30}\alpha + a_{03}\beta = 0$ и $\omega_2(x,y) \equiv x^2 + y^2 - \alpha - \beta = 0$ - частные интегралы системы (5). Здесь

$$\alpha = -\frac{p^2(p^2-4d^2)(p^2(a_{01}+b_{10})^2 - d^2a_{01}^2)}{((p^2-2d^2)a_{01}+p^2b_{10})^2},\ \beta = \frac{d^2p^2(p^2-4d^2)a_{01}(a_{01}+2b_{10})}{((p^2-2d^2)a_{01}+p^2b_{10})^2}.$$

В [4] указаны результаты исследования системы (5) при условии, что $a_{01}=0$ или $b_{10}=0$. Поэтому исследование системы (5) проведём при условии, что $a_{01}\cdot b_{10} \neq 0$. Исследование распадается на три случая:

1) $a_{03} = 0, b_{30} \neq 0$; 2) $a_{03} \neq 0, b_{30} = 0$; 3) $a_{03} \cdot b_{30} \neq 0$.

Сначала найдем особые точки системы (5) в конечной части плоскости и выясним их характер.

1) $a_{03} = 0, b_{30} \neq 0$. Сделав в системе (5) замену времени $(p^2-4d^2)b_{10}dt \to dt$, получим систему

$$\frac{dx}{dt} = -2p^2y - 2x^2y,\ \frac{dy}{dt} = p^2x + x^3 - xy^2. \qquad (7)$$

Система (7) имеет единственную особую точку (0;0) в конечной части плоскости с характеристическими числами $\lambda_{1,2} = \pm ip^2\sqrt{2}$. В силу симметричности поля направлений точка (0;0) - центр.

2) $a_{03} \neq 0, b_{30} = 0$.

Сделав замену времени $\dfrac{p^2(p^2-4d^2)}{2d^2}b_{10}dt \to dt$ в системе (5), получим систему

$$\frac{dx}{dt} = -p^2y - x^2y + y^3,\ \frac{dy}{dt} = 2d^2x - 2xy^2. \qquad (8)$$

Система (8) имеет особые точки *(0;0)*, $(0;\pm p)$ и $(\pm\sqrt{d^2-p^2};\pm d)$, если $p<d$ или *(0;0)* и $(0;\pm p)$, если $p \geq d$.

Пусть $p<d$. Тогда точка *(0;0)* имеет характеристические числа $\lambda_{1,2} = \pm ipd\sqrt{2}$ и, следовательно, является центром. Точки $(0;\ \pm p)$ имеют характеристические числа $\lambda_{1,2} = \pm 2p\sqrt{d^2-p^2}$ и являются четырехсепаратрисными седлами. Наконец, точки $(\sqrt{d^2-p^2};d)$ и $(-\sqrt{d^2-p^2};-d)$ имеют характеристические числа $\lambda_1 = -2d\sqrt{d^2-p^2}$, $\lambda_2 = -4d\sqrt{d^2-p^2}$, а точки $(\sqrt{d^2-p^2};-d)$ и $(-\sqrt{d^2-p^2};d)$ имеют характеристические числа $\lambda_1 = 2d\sqrt{d^2-p^2}$, $\lambda_2 = 4d\sqrt{d^2-p^2}$ и являются простыми узлами.

Пусть $p>d$. Тогда точки *(0;0)* и $(0;\pm p)$ – центры.

Пусть $p=d$. Тогда точка *(0;0)* – центр, а точки $(0;\pm p)$ имеют характеристические числа $\lambda_{1,2} = 0$, т.е. являются сложными особыми точками. Методом, данным в [5], выясним характер этих особых точек. В системе (8) сделаем замену переменных $x \to x, y \to y \pm p$ и замену времени $2p^2dt \to dt$.

Получим систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \mp \frac{1}{2p}x^2 \pm \frac{3}{2p}y^2 - \frac{1}{2p^2}x^2y + \frac{1}{2p^2}y^3 \equiv y + \xi(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= \mp\frac{2}{p}xy - \frac{1}{p^2}xy^2 \equiv \eta(x,y). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Находим теперь решение уравнения $y + \xi(x,y) = 0$ относительно y в виде $y = \alpha_2 x2 + \alpha_3 x^3 + \ldots \equiv \varphi(x)$. Получим решение $y = \pm\frac{1}{2p}x^2 + \ldots \equiv \varphi(x)$. Далее находим

$$f(x) \equiv \eta(x,\varphi(x)) = -\frac{1}{p^2}x^3 + \ldots = ax^\alpha + \ldots, g(x) \equiv \xi_x'(x,\varphi(x)) + \eta_y(x,\varphi(x))' = \mp\frac{3}{p}x + \ldots = bx^\beta + \ldots$$

Так как $\alpha = 2\beta + 1$, $-b^2 \le 4a(\beta+1) < 0$ и α,β-нечётные, то, согласно [5], точки $(0;\pm p)$ являются точками с одним гиперболическим, двумя параболическими и одним эллиптическим секторами Бендиксона.

3) $a_{03} \cdot b_{30} \ne 0$. Система (5) в этом случае имеет особые точки

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0, \qquad (10)$$

$$x_{23} = 0,\ y_{1,2} = \pm p\sqrt{-\frac{(p^2 - 4d^2)a_{01}}{a_{03}}},\ \frac{a_{01}}{a_{03}} > 0 \qquad (11)$$

$$x_{4,5} = \pm p\sqrt{-\frac{(p^2 - 4d^2)b_{10}}{b_{30}}},\ y = 0,\ \frac{b_{10}}{b_{30}} > 0, \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} x_{6,7} &= \pm\frac{p\sqrt{-(p^2 - 4d^2)(a_{01}b_{12} - b_{10}a_{03})}}{\sqrt{2((p^2 - 2d^2)a_{01} + p^2 b_{10})}}, a_{01}b_{12} - b_{10}a_{03} \ge 0, \\ y_{6,7} &= \pm\frac{p\sqrt{-(p^2 - 4d^2)(b_{10}a_{21} - a_{01}b_{30})}}{\sqrt{2((p^2 - 2d^2)a_{01} + p^2 b_{10})}}, b_{10}a_{21} - a_{01}b_{30} > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Здесь $a_{01}b_{12} - b_{10}a_{03} = 2(p^2(a_{01} + b_{10})^2 - d^2a_{01}^2)$, $b_{10}a_{21} - a_{01}b_{30} = -2d^2(a_{01} + 2b_{10})a_{01}$

Характеристические числа, соответствующие точкам (10)-(13), такие

$$\lambda_{1,2} = \pm p^2(p^2 - 4d^2)\sqrt{a_{01}b_{10}}, \qquad (10')$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2p(p^2 - 4d^2)\sqrt{\frac{a_{01}(d^2a_{01}^2 - p^2(a_{01} + b_{10})^2)}{a_{01} + 2b_{10}}}, \qquad (11')$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2dp^2(p^2 - 4d^2)\sqrt{-\frac{a_{01}b_{10}(a_{01} + 2b_{10})}{2d^2a_{01} + p^2b_{10}}}, \qquad (12')$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \pm\frac{4dp^2\sqrt{(d^2a_{01}^2 - p^2(a_{01} + b_{10})^2)(a_{01} + 2b_{10})a_{01}}}{(p^2 - 2d^2)a_{01} + p^2b_{10}}, \\ \lambda_2 &= \pm\frac{2dp^2\sqrt{(d^2a_{01}^2 - p^2(a_{01} + b_{10})^2)(a_{01} + 2b_{10})a_{01}}}{(p^2 - 2d^2)a_{01} + p^2b_{10}}, \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

причём $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ge 0$

Сразу рассмотрим случай, когда $a_{01}b_{12} - b_{10}a_{03} = 0$. В этом случае

$b_{10} = \dfrac{d-p}{p} a_{01}$ или $b_{10} = -\dfrac{d+p}{p} a_{01}$.

Так как по условию $a_{01} \cdot b_{10} \neq 0$, то $d \neq p$.

Пусть $b_{10} = \dfrac{d-p}{p} a_{01}$. Сделав в системе (5) замену времени $(p-2d)a_{01}dt \to dt$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p^2(p+2d)y + (p+2d)x^2y + py^3, \\ \frac{dy}{dt} &= p(p+2d)(d-p)x - (d+p)x^3 + (d-p)xy^2, \end{aligned}\right\}$$

имеющую четырехсепаратрисное седло (0;0) и центры $\left(\pm\sqrt{\dfrac{p(p+2d)(d-p)}{d+p}};0\right)$, если $d > p$.

Пусть $b_{10} = -\dfrac{d+p}{p} a_{01}$. Сделав в системе (5) замену времени $(p+2d)a_{01}dt \to dt$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p^2(p-2d)y + (p-2d)x^2y + py^3, \\ \frac{dy}{dt} &= -p(p-2d)(d+p)x - (d-p)x^3 - (d+p)xy^2, \end{aligned}\right\}$$

которая имеет центр (0;0), четырехсепаратрисные седла $\left(\pm\sqrt{\dfrac{p(p-2d)(d+p)}{d-p}};0\right)$, где $d < p$, и особые точки $\left(0;\pm\sqrt{p(2d-p)}\right)$ с характеристическими числами $\lambda_{1,2} = 0$. Для выяснения характера сложных особых точек $\left(0;\pm\sqrt{p(2d-p)}\right)$ применяем тот же метод, что и в случае 2). Выясняется, что эти точки имеют один гиперболический, два параболических и один эллиптический секторы Бендиксона.

Пусть теперь $a_{01}b_{12} - b_{10}a_{03} > 0$. Тогда точки (10)-(13) будут простыми и их характер устанавливается по характеристическим числам (10′)-(13′).

Найдем теперь особые точки системы (5) в бесконечной части плоскости и их характеристические числа. Для этого к системе (5) применяем преобразования Пуанкаре [6]:

$x = \dfrac{1}{z},\ y = \dfrac{u}{z}$ и $x = \dfrac{v}{z},\ y = \dfrac{1}{z}$.

Получим системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= b_{30} + (b_{12} - a_{21})u^2 + p^2(p^2 - 4d^2)b_{10}z^2 - a_{03}u^4 - p^2(p^2 - 4d^2)a_{01}u^2z^2, \\ \frac{dz}{dt} &= -a_{21}uz - a_{03}u^3z - p^2(p^2 - 4d^2)a_{01}uz^3, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= a_{03} + (a_{21} - b_{12})v^2 + p^2(p^2 - 4d^2)a_{01}z^2 - b_{30}v^4 - p^2(p^2 - 4d^2)b_{10}v^2z^2,\\ \frac{dz}{dt} &= -b_{12}vz - b_{30}v^3z - p^2(p^2 - 4d^2)b_{10}vz^3,\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Приравнивая правые части системы (14) к нулю и полагая $z = 0$, получим после преобразования уравнение

$$a_{03}u^2 - b_{30} = 0 \quad (16)$$

для определения особых точек $(u; 0)$.

Пусть $a_{03} = 0$ и $b_{30} \neq 0$. Тогда уравнение (16) действительных решений не имеет. Пусть $a_{03} \neq 0$ Ц $b_{30} = 0$. Тогда «концы» оси ОХ будут особой точкой с характеристическими числами $\lambda_{1,2} = 0$, причем система (14) не имеет линейных членов.

Пусть $a_{03}b_{30} \neq 0$. Тогда система (14) имеет две особые точки $\left(u_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b_{30}}{a_{03}}};0\right)$, где $\frac{b_{30}}{a_{03}} > 0$, с характеристическими числами

$\lambda_1 = 2((p^2 - 2d^2)a_{01} + p^2b_{10})u_{1,2}$, $\lambda_2 = -((p^2 - 2d^2)a_{01} + p^2b_{10})u_{1,2}$ Отсюда следует, что точки $(u_{1,2};0)$ – четырехсепаратрисные седла. Заметим, что если $b_{30} = 0$, то точки $(u_{1,2};0)$ сливаются и «концы» оси ОХ будут шестисепаратрисным седлом.

Полагая в системе (15) $v = z = 0$, видим, что если $a_{03} = 0$, то «концы» оси ОУ – особая точка с характеристическими числами $\lambda_{1,2} = 0$ и у системы (15) отсутствуют линейные члены. В конечной части плоскости система (5) в этом случае имеет единственную особую точку *(0:0),* которая является центром. Тогда «концы» оси ОУ имеют индекс 0 и, очевидно, будут двухсепаратрисным седлом.

В силу симметричности поля направлений системы (5) относительно обеих осей координат, предельных циклов система (5) не имеет.

Пример. Пусть $a_{01} = -1, b_{10} = 2, p = 3, d = 2.$ Тогда система (5) в конечной части плоскости имеет особые точки *(0;0)*-центр, $(\pm 3\sqrt{\frac{7}{5}}\ ;\ 0)$ и $(0\ ;\pm\sqrt{\frac{7}{3}})$- четырехсепаратрисные седла, $(\pm\frac{3\sqrt{35}}{17};\pm\frac{6\sqrt{21}}{17})$-узлы. В бесконечной части плоскости система (5) особых точек не имеет. Общий интеграл уравнения траектории системы (5) имеет вид.

$$10x^2 + 27y^2 - \frac{1386}{17} = C(x^2 + y^2 - \frac{63}{17})^2.$$

Если $C = -\frac{17}{16}$, то получим кривую (2), а именно,

$$(x^2 + y^2 + y)^2 - 16(x^2 + 9) = 0.$$

Литература

1. Савелов А. А. Плоские кривые. -М.: Изд.Физ.-мат.лит.,1960.-294с.

2. Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую //ПММ.-1952.- Т. 16, Вып. 6.-С. 659-670.
3. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - Минск: Выш. шк.,1974.-766 с.
4. Шкут В. В. Качественное исследование двух кубических систем, имеющих частный интеграл в виде алгебраической кривой четвертого порядка //Тезисы докладов Международной математической конференции «Еругинские чтения VII» – Гродно, 2001. – С. 234-235.
5. Андреев А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. - Минск: Выш. шк., 1979.-136 с.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. - М.: Наука, 1981.-568с.

Summary

The qualitative research of cubic system of the second order having private integral as one closed algebraic curve of the fourth order.