МАТЭМАТЫКА

УДК 519.240

С.Н. Гуз, М.Д. Юдин

ОДИН ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭВОЛЮЦИИ ПЯТЕН РАДИОАКТИВНОЙ ЗАРАЖЕННОСТИ

Часть I. Линейные направления

Эволюцию радиоактивных пятен в линейных направлениях мы рассматриваем как стохастически непрерывный [1] диффузионный процесс, модель которого получается в виде предельного распределения сумм случайных величин — приращений процесса [2].

Из стохастической непрерывности процесса следует, что при неограниченном размельчении отрезка времени [0, t] система соответствующих приращений процесса становится системой равномерно бесконечно малых случайных величин[1].

1^0. Мы предполагаем, что система серий приращений $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, соответствующая системе разбиений отрезка [0, t], при которых $\max\limits_{s}\Delta t_{ns}\to 0$ при $n\to\infty$, удовлетворяет условию фундаментальных теорем 2.3 или 2.7 из [3], стр. 60 и 72. В частности, удовлетворяет естественным ограничениям зависимости между приращениями, требуемым в этих теоремах. В таких условиях, как показано в [3], суммы $S(t)=\sum\limits_{s}\xi_{ns}$ будут иметь при $n\to\infty$ предельное распределение, логарифм характеристической функции (х.ф.) которого выражается по формуле

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}\,dK(x)-\frac{\sigma^2t^2}{2}+itb \qquad (1)$$

где $K(x)$ – спектральная функция Колмогорова величин $\eta_{ns}=\xi_{ns}-M\xi_{ns}$, σ^2 – предел суммы ковариаций (включая дисперсии), b – предел суммы математических ожиданий (м.о.) величин ξ_{ns}, а из области интегрирования исключен нуль.

По структуре формула (1) ничем не отличается от формулы Колмогорова (см., например, [4; 5]). Поэтому

1) определяемая формулой (1) функция $\psi(t)$ — логарифм безгранично делимой х.ф.,

2) каждое предельное распределение суммы приращений $\sum\limits_{s=1}^{n}\xi_{ns}$ представимо в виде композиции нормального и конечного или бесконечного числа пуассоновских распределений [4; 5].

В п.2), во-первых, нормальное распределение может быть и вырожденным, во-вторых, само нормальное распределение может быть представлено в виде предела композиций пуассоновских распределений [4; 5]. Однако при моделировании удобно пользоваться композицией "готового" нормального распределения и пуассоновских распределений.

Из п.2), следует, что составляя композиции нормального и конечного числа пуассоновских распределений, мы можем сколь угодно точно аппроксимировать любое распределение случайной функции *S(t)* при любом фиксированном *t*.

2^0. Вообще говоря, в линейных направлениях, пересекающих радиационные пятна, степень зараженности не постоянна: она попеременно убывает и возрастает, причем колебания сходят на нет к границе пятна. Поэтому теоретическая плотность вероятности в модели должна быть, вообще говоря, многовершинна. Это обстоятельство заставляет нас принять концепцию, предложенную в [2], а именно, внутренние взаимодействия диффузирующих частиц и внешние воздействия на ход процесса обусловливают разделение его приращений на два типа: относительно малые приращения броуновского типа, которых подавляющее большинство, и относительно большие, различные, возможно, по длине, приращения, вызванные внешними факторами, такими, как перемещения среды, погодные условия, растаскивания и т.д.

Пусть ξ_{ns} — случайная величина — смещение диффузирующей частицы (радионуклида) за время Δt_{nk}, где Δt_{nk} – элементарные промежутки времени, полученные при разбиении отрезка [*0, t*], $\sum_{k=1}^{n}\Delta t_{nk}=t$, $\{\xi_{nk}\}_{k=1}^{n}$ – система серий приращений, для которой $\max_k \Delta t_{nk}\to 0$ при $n\to\infty$, $S(t)=\sum_k \xi_{nk}$, $\eta_{nk}=\xi_{nk}-M\xi_{nk}$.

Математически наличие подавляющего большинства малых приращений процесса и относительно редких больших, различных длин, отражается в модели условиями [2]: при любом сколь угодно малом $\tau>0$ и $n\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<\tau} x^2 dP\{\eta_{nk}<x\}\to\sigma^2(t),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-\alpha_s|<\tau} dP\{\eta_{nk}<x\}\to\lambda_s(t),\quad s=\overline{-m_1,m_2},\quad s\neq 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}M\left(\eta_{nk}^2;\ \bigwedge_{s=-m_1}^{m_2}\left|\eta_{nk}-\alpha_s\right|\geq\tau\right)\to 0,\quad \text{где}\quad \alpha_0=0,$$

$\alpha_{-m_1}<\alpha_{-m_1+1}<\ldots<\alpha_{-1}$ – отрицательные, $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{m_2}$ – положительные числа. Кроме того, полагаем, что существует предел суммы ковариаций:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s\neq p}M\eta_{ns}\eta_{np}=a(t),$$

и предел суммы м.о.: $\sum_{k=1}^{n}M\xi_{nk}\to\ell_0(t)$ в момент *t*.

В этих условиях из формулы (1) следует, что логарифм х.ф. распределения величины *S(t)* будет выражен по формуле:

$$\psi(z,t)=\sum_{s=-m_1}^{m_2}\lambda_s(t)\left(e^{i\alpha_s z}-1\right)-\frac{\left(\sigma^2(t)+a(t)\right)z^2}{2}+iz\left(\ell_0-\sum_{s=-m_1}^{m_2}\lambda_s(t)\alpha_s\right),$$

где $s\neq 0$, *z* – параметр х.ф., *t* – время. Отсюда получаем: в момент *t*, плотность вероятности распределения *S(t)* в виде композиции нормального и пуассоновских распределений:

$$p(x,t)=\frac{e^{-\sum_{s=-m_1}^{m_2}\lambda_s}}{\sqrt{2\pi\left(\sigma^2+a\right)}}\sum_{k_s=0,\forall s}^{\infty}e^{-\frac{\left(x-\left(\ell_0-\sum_{s=-m_1}^{m_2}\lambda_s\alpha_s\right)-\sum_{s=-m_1}^{m_2}k_s\alpha_s\right)^2}{2\left(\sigma^2+a\right)}}\prod_{s=-m_1}^{m_2}\frac{\lambda_s^{k_s}}{k_s!},\quad s\neq 0,\qquad (2)$$

3^0. Обычно для получения первого приближения теоретической плотности (2) к фактической радиозараженности в линейных направлениях достаточно взять две–три точки α_s и путем компьютерного варьирования параметров плотности (2) добиться хорошей адекватности. При этом можно использовать следующие приемы:

1. Сдвиг графика плотности. На рис. 1 вначале путем варьирования параметров и выбора единицы масштаба для плотности

$$p(x,t)=\frac{e^{-\lambda_{-1}-\lambda_1}}{\sqrt{2\pi\left(\sigma^2+a\right)}}\sum_{k_{-1}=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{\lambda_{-1}^{k_{-1}}\lambda_{-1}^{k_{-1}}}{k_{-1}!k_1!}e^{-\frac{\left(x-\left(\ell_0-\lambda_{-1}\alpha_{-1}-\lambda_1\alpha_1\right)-\alpha_{-1}k_{-1}-\alpha_1 k_1\right)^2}{2\left(\sigma^2+a\right)}}, \qquad (3)$$

получен подходящий вид кривой (3) с вершинами, еще не совпадающими с результатами измерений (справа α_{-1} =0 и α_1 =2, λ_1 = 4, σ^2+a=0.33, $\mu=(\ell_0-\lambda_{-1}\alpha_{-1}-\lambda_1\alpha_1)$=0). Затем путем подбора значений μ сделан параллельный сдвиг, совместивший вершины кривой с максимумами результатов измерений (слева μ=- 4.1).

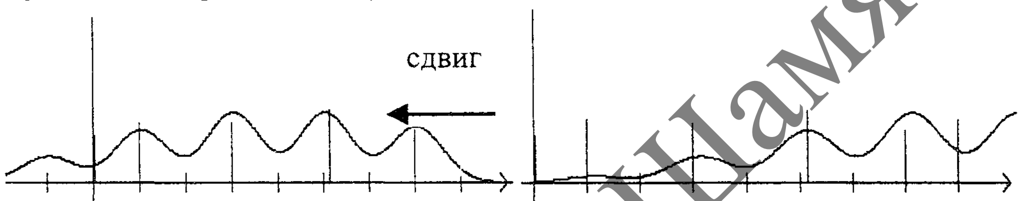

Рис. 1

2. Добавление новых точек α_s, носителей пуассоновской вероятности. Так на рис. 2 (левый график) вначале взята точка α_{-1} = -1.0, λ_{-1} =2.3, σ^2+a=0.1, μ= -1.9. Но график плотности (3) не аппроксимировал часть зараженности по данному направлению. Добавление точки α_{-2} = -2.0 позволило аппроксимировать зараженность по данному направлению (см. рис. 2 справа: α_{-1} = -1.0 и α_{-2} = -2.0, λ_{-1} = 2.3, λ_{-2} = 1.8, σ^2+a=0.1, μ= 1.1).

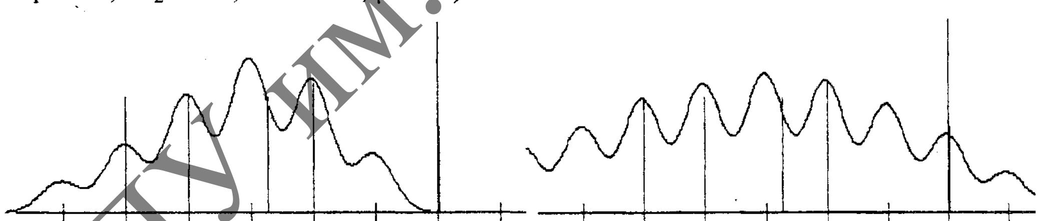

Рис.2

3. Сложение плотностей. Можно аппроксимировать действительную картину зараженности по частям. Например, вначале подобрать плотность $p_1(x,\ t)$ для одной части, затем $p_2(x,\ t)$ для другой части данного линейного направления. Затем сложить графики этих плотностей, приписав им некоторые вероятностные веса:

$$p(x,\ t) = q_1 p_1(x,\ t) + q_2 p_2(x,\ t), \qquad q_1>0,\ q_2>0,\ q_1+q_2=1.$$

На рис. 3 показана одна из реализаций данного подхода. Заметим, что вначале масштабы по вертикали были увеличены, поскольку при сложении графиков с вероятностными весами масштабы уменьшаются.

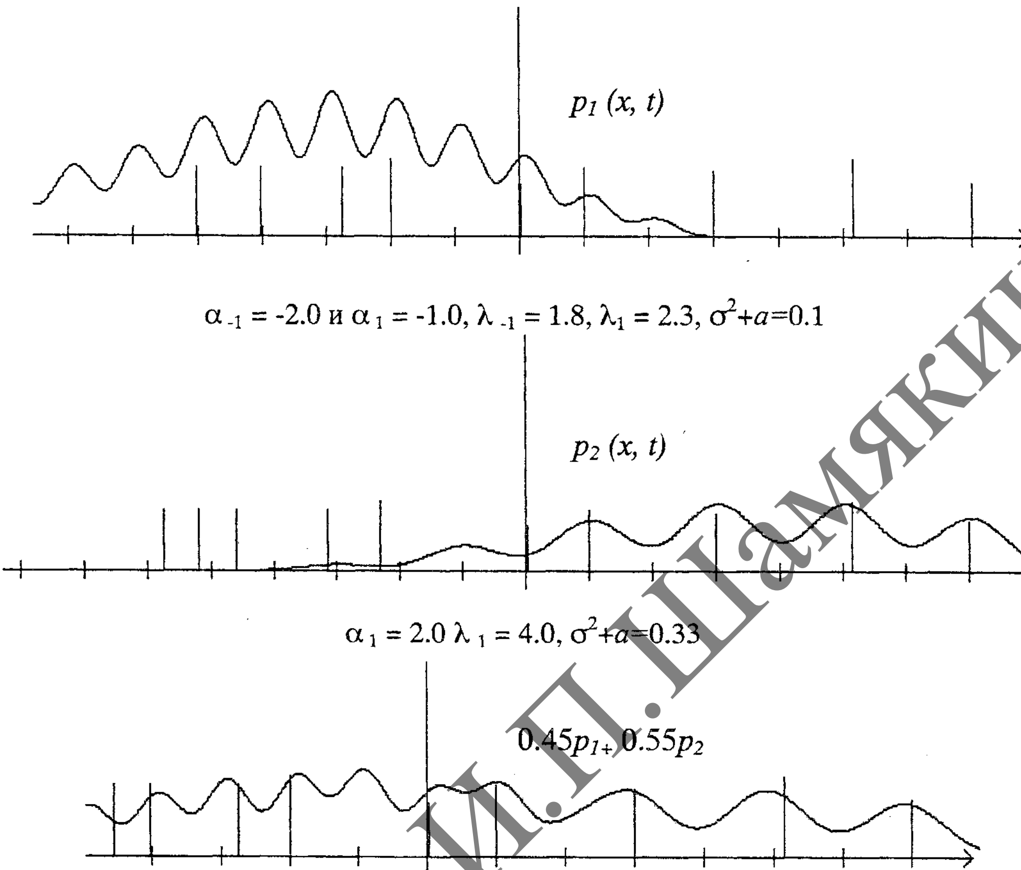

Рис.3

Замечание. При подборе аппроксимирующих графиков нами использовались замеры радиоактивной зараженности в районе пос. Мелешковичи Мозырского района, проведенные в 1988г. [6].

4^0. Повторные наблюдения эволюции зараженности позволяет, вообще говоря, как–то интерполировать параметры теоретической плотности, что выведет на возможность какого-то прогнозирования процесса.

Моделирование по веерным линейным направлениям, пересекающимся в одной точке, позволит, видимо, перейти к моделированию двумерными плотностями вероятности, с последующим получением изображений их поверхностей. Эта идея нами разрабатывается и будет реализована во второй части исследований по данному направлению.

Разумеется, степень зараженности уменьшается в результате естественного распада. это обстоятельство отразится в модели соответствующим уменьшением масштаба по вертикали.

Заметим, наконец, что плотность (3) удовлетворяет неоднородному уравнению теплопроводности [2]:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial^2 x} + f(x,t),$$

которое в теории вероятностей называют неоднородным уравнением диффузии. Явный вид функции $f(x, t)$ указан в [2]. Эта функция появляется в результате учета воздействий внешних факторов на процесс путем введения пуассоновских компонентов.

Литература

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. 1. – М., 1971.
2. Юдин М.Д. Один подход к моделированию диффузионного процесса// Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1994. –№2. С.58–60.
3. Юдин М.Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. – Минск: Университетское, 1990.
4. Лоэв М. Теория вероятностей. – М., 1962.
5. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. – М., 1972.

Summary

The intensity of infection rate on linear directions intersecting a radiation spot is modelled with the purpose of prediction of its changes of aircraft attitude.

Поступила в редакцию 5.06.01.

УДК 518.12