УДК 517.917

В.В. Шкут

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИМЕЮЩЕЙ ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВИДЕ ЗАМКНУТОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

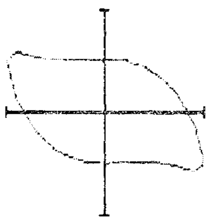
В данной работе проводится качественное исследование системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} a_{ij} x^i y^j, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} b_{ij} x^i y^j, \tag{1}$$

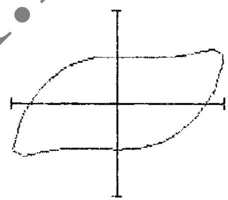
где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, при наличии у нее частного интеграла

$$\omega(x,y) \equiv (y^3 + px)^2 + y^2 - q^2 = 0, \qquad p \cdot q \neq 0. \tag{2}$$

Кривая (2) имеет вид, показанный на рисунках



p>0



p<0

Теорема. Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2}{p} y + 9xy^2 + \frac{9q^2}{p} y^3 \equiv P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= -2px - 3q^2 y + y^3 \equiv Q(x,y). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться равенством [1]: если кривая $\omega(x,y) = 0$ – частный интеграл системы, то

$$\omega'_x \cdot P(x,y) + \omega'_y \cdot Q(x,y) = F(\omega, x, y), \tag{4}$$

где $F(o,x,y)=0$. В нашем случае равенство (4) имеет вид:

$$\omega'_x \cdot P(x,y) + \omega'_y \cdot Q(x,y) = 6py^2 \cdot \omega(x,y). \tag{5}$$

Сделав в системе (3) замену времени $\frac{1}{p}dt \to dt$, получим для исследования систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2y + 9pxy^2 + 9q^2y^3, \\ \frac{dy}{dt} &= -2p^2x - 3pq^2y + py^3. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Найдем особые точки системы (6) в конечной части плоскости и исследуем их характер. Из (5) видно, что эти особые точки лежат на линиях $y=0$ и $\omega(x,y)=0$.

Решая систему

$$\left.\begin{aligned} y(2 + 9pxy + 9q^2y^2) &= 0, \\ 2p^2x + 3pq^2y - py^3 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

получим особую точку

$$x_1=0,\ y_1=0, \tag{8}$$

а также особые точки

$$x_{2,3} = \mp\frac{5}{3p}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad y_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{9}$$

при $3q^2 - 4 = 0$, или

$$x_{4,5} = -\frac{9q^2y_{2,3}^2 + 2}{9py_{2,3}}, \quad y_{4,5} = \sqrt{\frac{3q^2 \pm \sqrt{9q^4 - 16}}{6}}, \tag{10}$$

$$x_{6,7} = -\frac{9q^2y_{4,5}^2 + 2}{9py_{2,3}}, \quad y_{6,7} = -\sqrt{\frac{3q^2 \pm \sqrt{9q^4 - 16}}{6}}, \tag{11}$$

при $3q^2-4 > 0$.

Пусть $3q^2 - 4 = 0$. Тогда характеристические числа для точки (8) будут $\lambda_{1,2} = -2p$. Это значит, что точка (8) – узел. Характеристические числа для точек (9) такие: $\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 4p$. Чтобы выяснить характер этих сложных особых точек, переносим начало координат в точки (9) заменой переменных

$$x \to x \mp \frac{5}{3p}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad y \to y \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Получим системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 6px + 6y \pm 18p\sqrt{\frac{2}{3}}xy \pm 21\sqrt{\frac{2}{3}}y^2 + 9pxy^2 + 12y^3, \\ \frac{dy}{dt} &= -2p^2x - 2py \pm 3p\sqrt{\frac{2}{3}}y^2 + py^3,\end{aligned}\right\}(12)$$

которые заменой переменных

$$x \to \frac{1}{2p}(3x - y), \qquad y \to -\frac{1}{2}(x - y)$$

приводим к виду

$$\frac{dx}{dt} = 4px + \eta(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \xi(x, y).$$

Заменой $x \to \varphi(y) + x,$ где $\varphi(y)$ является решением уравнения $4px + \eta(x, y) = 0,$ добиваемся того, чтобы $\dfrac{\eta(0, y)}{\xi(0, y)} \to 0$ при $y \to 0$.

В нашем случае

$$\xi(0, y) = \pm 2p\sqrt{\frac{3}{2}}y^2 + \ldots, \quad \eta(0, y) = \frac{3p}{2}y^3 + \ldots .$$

Следовательно [2], точки (9) – седло-узлы.

Пусть $3q^2 - 4 > 0$. Характеристические числа для точки (8) такие:

$$\lambda_{1.2} = \frac{p}{2}\left(-3q^2 \pm \sqrt{9q^4 - 16}\right). \tag{13}$$

Тогда точка (8) – узел. Для точек (10) и (11) характеристические числа будут

$$\lambda_1 = p\left(3q^2 \pm \sqrt{9q^4 - 16}\right), \quad \lambda_2 = \pm p\sqrt{9q^4 - 16}. \tag{14}$$

Отсюда следует, что точки (x_4, y_4) и (x_6, y_6) – узлы, а точки (x_5, y_5) и (x_7, y_7) – четырехсепаратрисные седла.

Пусть $3q^2 - 4 < 0$. Тогда из (13) следует, что точка (8) – грубый фокус. На кривой (2) система (6) особых точек не имеет. Покажем, что кривая (2) является единственным предельным циклом системы (6). Для этого рассмотрим семейство замкнутых кривых Пуанкаре [3]:

$$F(x, y) \equiv \left(y^3 + px\right)^2 + y^2 = c^2, \tag{15}$$

заполняющих всю фазовую плоскость. Пусть $x = x(t),\ y = y(t)$ – некоторая траектория системы (6). Вычислим $\dfrac{dF(x(t), y(t))}{dt}$.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 6py^2\left(\left(y^3 + px\right)^2 + y^2 - q^2\right).$$

Если $0<C<q$, то кривые семейства (15) расположены внутри кривой (2) и $\frac{dF}{dt}<0$ при $p>0$ и $\frac{dF}{dt}>0$ при $p<0$. Это значит, что при $t\to\infty$ траектории системы (6) будут пересекать каждую кривую семейства (15) только один раз, удаляясь от кривой (2) при $p>0$ и приближаясь при $p<0$. Если $C>q>0$, то кривые семейства (15) расположены вне кривой (2) и $\frac{dF}{dt}>0$ при $p>0$ и $\frac{dF}{dt}<0$ при $p<0$. В данном случае траектории системы (6) будут пересекать каждую кривую семейства (15) один раз при $t\to\infty$, удаляясь от кривой (2) при $p>0$ и приближаясь при $p<0$. Отсюда следует, что кривая (2) – единственный предельный цикл системы (6). Этот цикл неустойчив при $p>0$ и устойчив при $p<0$. Пусть $q=0$. Тогда кривая (2) вырождается в точку $(0;0)$ и система (6) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt}=2y+9pxy^2,\quad \frac{dy}{dt}=-2p^2x+py^3. \tag{16}$$

Точка $(0;0)$ – единственная особая точка системы (16) в конечной части плоскости с характеристическими числами $\lambda_{1,2}=\pm 2pi$. Сделав в системе (16) замену переменных

$x\to-\frac{1}{p}x,\ y\to y,\ 2pdt\to dt$, получим систему

$$\frac{dx}{dt}=-y+\frac{9}{2}xy^2,\quad \frac{dy}{dt}=x+\frac{1}{2}y^3,$$

для которой точка $(0;0)$ является негрубым фокусом. Отсюда следует, что предельный цикл (2) для системы (6) рождается из негрубого фокуса $(0;0)$.

Выясним, существуют ли особые точки системы (6) в бесконечной части плоскости. К системе применяем последовательно преобразования Пуанкаре [3]:

$$x=\frac{1}{z},\quad y=\frac{u}{z}\quad \text{и}\quad x=\frac{v}{z},\quad y=\frac{1}{z}.$$

Получим системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=-2p^2z^2-8pu^3-3pq^2uz^2-9q^2u^4-2u^2z^2,\\ \frac{dz}{dt}&=-9pu^2z-9q^2u^3z-2uz^3\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=9q^2+8pv+2z^2+3pq^2vz^2+2p^2v^2z^2,\\ \frac{dz}{dt}&=-pz+3pq^2z^3+2p^2vz^3.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Положим в правых частях системы (17) $z=0$ и приравняем их к нулю. Получим уравнение для определения координаты u точек $(u;0)$, лежащих на экваторе сферы Пуанкаре:

$$8pu^3+9q^2u^4=0.$$

Отсюда $u=0$ и $u = -\frac{8p}{9q^2}$. Имеем две особые точки: *(0;0)* – «концы» оси ОХ и $(-\frac{8p}{9q^2};0)$. Вторая точка имеет характеристические числа $\lambda_1 = \frac{(8p)^3}{(3q)^4}$ и $\lambda_2 = -\frac{(4p)^3}{(3q)^4}$ и, следовательно, является четырехсепаратрисным седлом. Точка *(0;0)* имеет характеристические числа $\lambda_{1,2} = 0$, и в системе (17) отсутствуют линейные члены. С учетом того, что сумма индексов всех особых точек равна *1*, получаем, что точка *(0;0)* должна иметь индекс *1*. Так как все траектории системы (6), лежащие вне кривой (2), пересекают кривые семейства (15) один раз, неограниченно удаляясь от кривой (2) при $t \to \infty (t \to -\infty)$, то точка *(0;0)* – узел.

Из вышеизложенного следует

Теорема. Система (6) в конечной части плоскости имеет:

1. Точку (8) – узел и точки (9) – седло-узлы, если $3q^2-4=0$.
2. Точку (8) – узел и точки (10) и (11) – два узла и два четырехсепаратрисных седла, если $3q^2-4>0$.
3. Точку (8) – грубый фокус и предельный цикл (2), если $3q^2-4<0$.

В бесконечной части плоскости система (6) в случаях 1 – 3 имеет узел и четырехсепаратрисное седло.

Литература

1. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. – 1952. – Т.16. Вып. 6. – С. 659-670.
2. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. – Минск: Выш. шк., 1979. – 136 с.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М: Наука, 1981. – 568 с.

Summary

The research of a cubical system of the second order having a individual integral by the way by a selfcontained algebraic curve of the sixth order is conducted.

Поступила в редакцию 28.06.02.