УДК 517.917

В. В. Шкут

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВИДЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Пусть для системы уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=1}^{3} a_{ij}x^iy^j,\quad \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=1}^{3} b_{ij}x^iy^j, \tag{1}$$

где $a_{ij},\ b_{ij}\in R$, кривая (см. [1])

$$\omega(x,y)\equiv\left((2b+1)x^2+y^2+p^2\right)^2+4b^2(x^2-1)y^2=0,\quad 0<p<b \tag{2}$$

является частным интегралом. Заметим, что если *p=b,* то кривая вырождается в точки $(0;\pm b)$. Если же *0<p<b,* то кривая состоит из двух овалов. Практически уравнение (2) задает траекторию какой-либо точки шатуна в центральной криволинейной передаче и при *0<2p<b* не охватывает точку (0;0).

Теорема. Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) была гамильтоновой и имела вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\left(p^2-2b^2\right)y+\left(2b^2+2b+1\right)x^2y+y^3,\\ \frac{dy}{dt}&=-p^2(2b+1)x-(2b+1)^2x^3-\left(2b^2+2b+1\right)xy^2.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

При доказательстве теоремы используется равенство [3]: если кривая $\omega(x,y)=0$ - частный интеграл системы

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y),\ \text{тт}\ \omega'_x\cdot P+\omega'_y\cdot Q=F$$

где функция $F=F(\omega,x,y)$, причем $F(0,x,y)=0$. В нашем случае получаем $F\equiv 0$. Это значит, что любая кривая семейства

$$\omega(x,y)\equiv\left((2b+1)x^2+y^2+p^2\right)^2+4b^2\left(x^2-1\right)y^2=C \tag{4}$$

будет частным интегралом системы (3). При *C=0* получаем кривую (2). (4) есть первый интеграл системы (3). Сразу замечаем, что поле направлений системы (3) симметрично относительно обеих осей координат.

Найдем особые точки системы (3), лежащие в конечной части плоскости. Для этого найдем действительные решения системы:

$$\left.\begin{aligned}&(p^2-2b^2)y+(2b^2+2b+1)x^2y+y^3=0,\\ &p^2(2b+1)x+(2b+1)^2x^3+(2b^2+2b+1)xy^2=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

система (3) в конечной части плоскости имеет особые точки *(0; 0)* и $(0; \pm\sqrt{2b^2 - p^2})$. Характеристические числа для них, соответственно, такие:

$$\lambda_{1,2} = \pm p\sqrt{(2b+1)(2b^2-p^2)} \quad \text{и}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2\left(2b^2 - p^2\right)\left(p^2(2b+1) + \left(2b^2+2b+1\right)\left(2b^2-p^2\right)\right)}.$$

Видим, что точка *(0; 0)* - четырехсепаратрисное седло, а точки $(0; \pm\sqrt{2b^2 - p^2})$ - центры. При $C = p^4$ из (4) получаем уравнение сепаратрис седла *(0;0)*.

Выясним теперь, имеет ли система (3) особые точки в бесконечной части плоскости. Применив к системе (3) преобразование Пуанкаре [4] $x = \frac{1}{z}$ и $y = \frac{u}{z}$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -(2b+1)^2 - 2\left(2b^2+2b+1\right)u^2 - p^2(2b+1)z^2 - u^2 - \left(p^2-2b^2\right)u^2z,^2 \\ \frac{dz}{dt} &= -\left(2b^2+2b+1\right)uz - u^3z - \left(p^2-2b^2\right)uz^3. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Полагая в правых частях системы (6) *z=0* и приравнивая их к нулю, получим уравнение для определения координаты *u*:

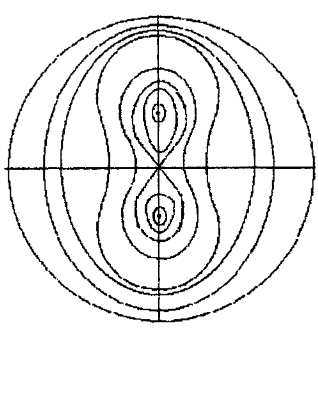
$$u^4 + 2\left(2b^2+2b+1\right)u^2 + (2b+1)^2 = 0.$$

Очевидно, что это уравнение действительных решений не имеет. Это значит, что система (3) в бесконечной части плоскости не имеет особых точек вида *(u;0)*. Применив к системе (3) преобразование Пуанкаре $x = \frac{v}{z}$, $y = \frac{1}{z}$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 1 + 2\left(2b^2+2b+1\right)v^2 + \left(p^2-2b^2\right)z + (2b+1)^2v^4 + p^2(2b+1)v^2z^2, \\ \frac{dz}{dt} &= \left(2b^2+2b+1\right)vz + (2b+1)^2v^3z + p^2(2b+1)vz^3. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Видим, что при $v = z = 0$ правые части системы (7) не обращаются в нуль. Это значит, что "концы" оси OY не являются особой точкой системы (3).

По результатам исследования строим качественную картину поведения траекторий системы (3) в круге Пуанкаре.



Литература

1. Савелов А.А. Плоские кривые. - М.: Изд. Физ-мат. лит., 1960. - 294с.
2. Андронов А.А. и др. Теория колебаний. - М.: Наука, 1981. - 568с.
3. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений - Минск: изд. "Наука и техника", 1972. - 663с.
4. Амелькин В.В., Садовский А.П. Математические модели и дифференциальные уравнения. Минск: Выш. шк., 1982 - 271с.

Summary

The qualitative research of a cubical bivariate system having a individual integral in the form of an algebraic curve of the fourth order is conducted.

Поступила в редакцию 20.11.01.