УДК 519.240

С.Н. Гуз, Н.В. Сергиевич, М.Д. Юдин

О ВЛИЯНИИ ЗАВИСИМОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СЛАГАЕМЫХ НА ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИХ СУММ

В [1-4] показано, что корреляция случайных слагаемых поставляет, вообще говоря, в предельное распределение их сумм нормальный компонент, благодаря чему предельное распределение становится абсолютно непрерывным, и что, наоборот, дисперсионный «нормальный шум», возникающий из-за рассеивания значений случайных слагаемых в окрестности нуля, может быть ликвидирован путем соответствующего коррелирования слагаемых.

В данной работе на базе общих теорем даются примеры, два из которых сопровождаются компьютерными изображениями, иллюстрирующие вышесказанное и показывающие возможность существенного влияния зависимости между случайными слагаемыми на предельное распределение их сумм. Иллюстрация проводится на базе одномерных и двумерных распределений Пуассона.

1^0. Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$ - система серий d-мерных векторов, определенных при каждом n на одном и том же вероятностном пространстве, имеющих ограниченные дисперсии и принимающих значения в R^d. Обозначим: $\xi_{ns}=\left(\xi_{ns}^{(1)},\dots,\xi_{ns}^{(d)}\right)$, $x=\left(x_1,\dots,x_d\right)$, $t=\left(t_1,\dots,t_d\right)$, (x, y) - скалярное произведение, $S_n=\sum\limits_{s}^{n}\xi_{ns}$.Запись $\xi_{ns}\le x$ означает, что $\xi_{ns}^{(i)}\le x_i$, $i=\overline{1,d}$, [6].

Не нарушая общности, будем считать, что математическое ожидание (м.о.). $M\,\xi_{ns}^{(i)}=0$, $s=\overline{1,n}$, $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, .

Введем симметричную матрицу $B_n=\left\|b_{n(i,j)}\right\|$, $i,j=\overline{1,d}$, где

$$b_{n(i,j)}=\sum_{s}M\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{ns}^{(j)};\left|\xi_{ns}\right|\le\varepsilon\right)+\sum_{s\ne p}M\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)},\ \varepsilon>0,$$

Через $h(n)$ обозначим медленно меняющуюся функцию при $n\to\infty$ [7].

В [2] приведена

Теорема 1. *Пусть вектора системы серий* $\{\xi_{ns}\}$ $m_n=m_0n^{1/8-\rho}$ *зависимы, где m0-любое число,* $0\le\rho\le 1/8$, *кроме того, найдутся постоянные* H_1, H_2 *и* n_0 *такие, что при* $n\ge n_0$,

$$\max_{s,i}M\,\xi_{ns}^{(i)2}\le\frac{H_1h(n)}{n},\quad \max_{s,r,q,i,j,k}M\left|\xi_{ns}^{(i)}\xi_{nr}^{(j)}\xi_{nq}^{(k)}\right|\le\frac{H_2h(n)}{n^{3/2}},\qquad(1)$$

где $0\le|r-q|\le m_0n^{1/4-\rho}$, $0<|s-q|\le m_0n^{1/4-\rho}$. *Тогда если при* $n\to\infty$,

$$K_n(x) = \sum_{s=1}^{n} M\left(\xi_{ns}^2 ; \xi_{ns} \le x\right) \xrightarrow{сл.} K(x) < \infty, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} B_n = B,$$

то сумма Sn будет иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм характеристической функции (х.ф.) которого

$$\psi(t) = \int_{R^d} \left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)\right) \frac{1}{|x|^2} dK(x) - \frac{(t, Bt^*)}{2}, \tag{2}$$

где t - вектор-столбец, а из области интегрирования исключен нуль-вектор.*

В [2] указано, что если в (1) первое условие заменить на $\max_{s,i} M\xi_{ns}^{(i)} \le \frac{H_1}{n}$, то в теореме 1 m_n-зависимость можно заменить на условие равномерно сильного перемешивания (р.с.п.) [7] с коэффициентом $\beta(k) = o(k^{-3-\nu})$, $\nu > 0$.

И еще, в условиях теоремы 1 матрица В не может быть отрицательно определена, поскольку (2) - логарифм х.ф.

2^0. В [1] и [8] приведены примеры m_n-зависимых случайных величин, в предельном распределении сумм которых нормальная составляющая появляется только вследствие корреляции слагаемых. Это же может произойти и в предельном распределении сумм зависимых векторов (см. пример в [5]).

Пример 1. При невыполнении условий (1) теоремы 1 именно корреляция случайных слагаемых может повлиять на существование предельного распределения суммы *Sn*. Действительно, пусть, например, *Xn1, ..., Xn(n+k-1)* - независимые случайные величины, *d*=1, причем

$$X_{ns} = \begin{cases} \dfrac{g}{m\sqrt{n}}, & p_1 = \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{g}{m\sqrt{n}}, & p_2 = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где $s = \overline{1, n+k-1}$, $g>0$. Определим систему серий *k*-зависимых случайных величин, полагая

$\xi_{ns} = X_{ns} + X_{n(s+1)} + ... + X_{n(s+k-1)}$,

$s = \overline{1,n}$. Очевидно, $M_{ns} = 0$.

При $k = n^{\alpha}$, $m = n^{\beta}$, $0 < \beta < \alpha < 1/8$ и $2\beta > \alpha$ получаем, при достаточно больших *n*, когда возможные значения *xns* войдут в отрезок [-e, e], e > 0,

$$\sum_s M\left(\xi_{nS}^2 ; |\xi_{nS}| \le \varepsilon\right) = \frac{nkg^2}{nm^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

в то же время,

$$\sum_{s \ne p} M\xi_{nS}\xi_{np} = \frac{2nk(k-1)g^2}{2nm^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty. \tag{3}$$

Соотношение (3) «вырождает» предельное распределение суммы $S_n = \sum_s \xi_{ns}$.

Пример 2. Рассмотрим двумерный случай: *d*=2. Пусть , $s = \overline{1,n}$,

$\eta_{ns} = (\eta_{ns}^{(1)}, \eta_{ns}^{(2)})$. Обозначим через *e1* и *e2* t-окрестность точек (1;0) и (0;1). Добавим к условиям теоремы 1 условия: при любом $\tau \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_s P\left\{\xi_{ns}\in e_i\right\}=\lambda_i\ ,\ i=1,2;\ \lim_{n\to\infty}\sum_s \int\limits_{e_1\cup e_2} x^2\,dP\left\{\xi_{ns}\le x\right\}=0\ . \tag{4}$$

будет распределение Пуассона на целочисленной решетке $\{(m,k)\}$, $m,k=\overline{0,\infty}$, поскольку при достаточно малом $\varepsilon>0$ из (4) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_s M\left(\xi^{\,i}_{nS}\,\xi^{\,j}_{nS}\,;\left|\xi_{nS}\right|\le\varepsilon\right)=0$. В случае же m_n-зависимости векторов η_{ns} в предельном распределении суммы S_n может появиться двумерный нормальный компонент только вследствие корреляции слагаемых. Например, достаточно определить покоординатную зависимость так, как это сделано в примере 1, и положить $k=m$. Поэтому плотность предельного распределения суммы S_n будет иметь вид

$$p(x)=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{\left|B^{-1}\right|}}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^m\lambda_2^k}{m!k!}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x-q\right),B^{-1}\left(x-q\right)^*\right\}, \tag{5}$$

где $x=(x_1,\ x_2)$, $q=(m,k)$, матрица $B^{-1}=\left\|c_{ij}\right\|$ обратна матрице $B=\left\|b_{ij}\right\|$, где $b_{ij}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{s\neq p}M\xi^{(i)}_{ns}\xi^{(j)}_{np}$, $i,j=1,2$, не обязана быть нулевой.

На рис.1, 2 представлены изображения поверхности плотности (5) при различных значениях ее параметров. . На рис.2 уменьшен масштаб по вертикали.

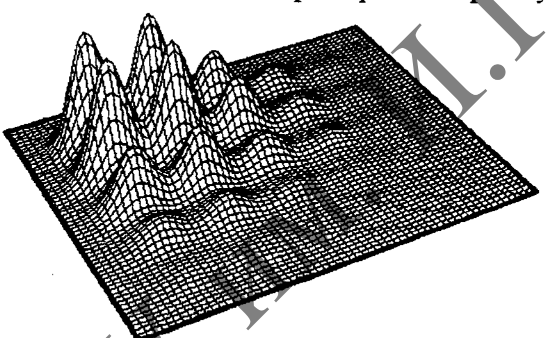

Рис.1 $c_{11}=c_{22}=14, c_{12}=c_{21}=2, \lambda_1=\lambda_2=1$

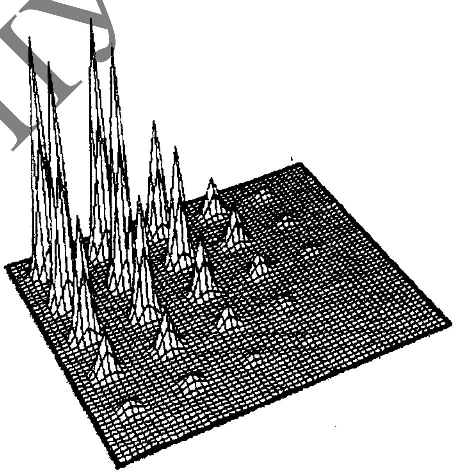

Рис.2 $c_{11}=c_{22}=100, c_{12}=c_{21}=10, \lambda_1=\lambda_2=1$

Пример 3. Пусть, как и в примере 2, d=2, $\xi_{ns} = \eta_{ns} - M\eta_{ns}$, но пуассоновская вероятность сосредоточивается в произвольной точке $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, $x_0 \neq 0$. Обозначим через е τ -окрестность точки x_0 и к теореме 1 добавим условия: при любом $\tau \in (0, |x_0|)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_s P\{\xi_{ns} \in e\} = \lambda, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_s \int_{\bar{e}} x^2 dP\{\xi_{ns} \le x\} = 0 \cdot$$

Тогда если $\sum_s M\eta_{ns} \to \lambda x_0$ при $n \to \infty$, то, согласно теореме 1, при независимости слагаемых сумма $S_n = \sum_s \eta_{ns}$ будет иметь пуассоновское предельное распределение вдоль полупрямой $x_2=kx_1$, $k\geq 0$, проходящей через точку x_0. В случае зависимости слагаемых η_{ns} сумма S_n будет иметь предельное распределение с плотностью вероятности [5]

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x - mx_0, B^{-1}(x - mx_0)^*\right)\right\}, \qquad (6)$$

где $x=(x_1,x_2)$.

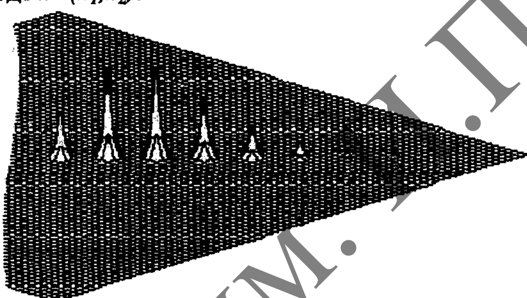

Рис.3. $c_{11}=c_{22}=10$, $c_{12}=c_{21}=9$, $\lambda=2$

Изображения поверхности плотности (6) при различных значениях ее параметров представлены на рис. 3, 4. На рис. 4 уменьшен масштаб по вертикали.

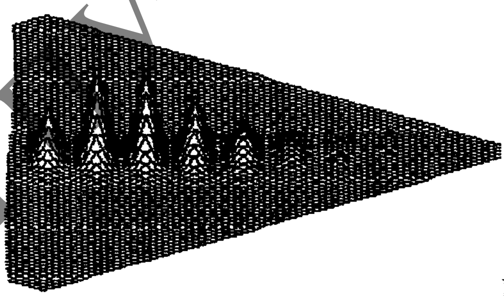

Рис 4. $c_{11}=c_{22}=50$, $c_{12}=c_{21}=10$, $\lambda=2$

3. Замечание1.

Корреляция случайных слагаемых может и «помочь» предельному распределению их сумм быть дискретным. В [1, 8] приведены примеры сумм зависимых случайных величин, удовлетворяющих условиям (1) и условию р.с.п. с коэффициентом $\beta(k) = O(2^{-k})$, для которых при любом $\tau \in (0,1)$

$$\sum_s M\left(\xi_{ns}^2; |\xi_{ns}| \le \tau\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} g^2 > 0, \quad \sum_{s\neq p} M\xi_{ns}\xi_{np} \xrightarrow[n\to\infty]{} -g^2.$$

Благодаря чему предельное распределение этих сумм остается распределением Пуассона, хотя, как известно, в случае независимости слагаемых для этого необходимо условие:

$$\sum_s M\left(\xi_{ns}^2; |\xi_{ns}| \le \tau\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, в некоторых случаях установлением специальной корреляции случайных слагаемых можно добиться дискретности предельного распределения их сумм.

Замечание 2.

Элементарные выкладки показывают [2], что в теореме 1 предельная матрица $B = \|b_{ij}\|$, где

$$b_{i,j} = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \sum_{0\le|s-p|\le m_n} M\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}; |\xi_{ns}| \le \varepsilon \Lambda |\xi_{np}| \le \varepsilon\right).$$

Замечание 3.

Часто m_n-зависимость называют сильной, даже при постоянном m_n. Эта зависимость существенно отличается от условия перемешивания. В частности, справедлива

Теорема 2. *Пусть вектора системы серий* $\{\xi_{ns}\}$ *при каждом n одинаково распределены, удовлетворяют условию р.с.п. с коэффициентом* $\beta(k)$ *таким, что* $\sum_{k=1}^{\infty}\beta^{1/2}(k) < \infty$ *и* $M\xi_{ns}^{(i)} = 0$, $i = \overline{1,d}$, $s = \overline{1,n}$; *кроме того, найдутся постоянные* H_1, H_2 *и* n_0 *такие, что при* $n \ge n_0$

$$\max_{s,i} M\xi_{ns}^{(i)2} \le \frac{H_1}{n}, \qquad \max_{s,p,i,j,s\neq p} M\left|\xi_{ns}^{(i)2}\xi_{np}^{(j)}\right| \le \frac{H_2 h(n)}{n^{3/2}}.$$

Тогда если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_s M\left(\xi_{ns}^2; |\xi_{ns}| \le \varepsilon\right) = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s\neq p} M\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)} = 0.$$

Эта теорема доказывается аналогично доказательству теоремы 2.10 в [1] (см. также теорему 2 в [8]).

Следовательно, в условиях теоремы 2 корреляция слагаемых не будет влиять на дискретность предельного распределения их сумм.

Литература

1. Юдин М.Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. - Минск, «Университетское», 1990. - 254 с.

2. Юдин М.Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых векторов// Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. -1994, №3. - С. 31-35.

3. Юдин М.Д. Об обобщении формулы Леви-Хинчина на суммы зависимых векторов// Изв. вузов. Математика. - 1996, №4. - С. 75-80.

4. Юдин М.Д. О предельных распределениях сумм зависимых векторов// Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. - 1997, №4. - С. 19-23.
5. Юдин М.Д. Применение обобщенной формулы Колмогорова к суммам зависимых векторов// Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. - 1997, №3. - С. 28-31.
6. Биллинсгли П. Сходимость вероятностных мер. - М., «Наука», 1977. - 352 с.
7. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины М., «Наука», 1965. - 524 с.
8. Юдин М.Д. Примеры применения обобщенной формулы Колмогорова к суммам зависимых случайных величин// Изв. Вузов. Математика. -1980,. №9. - С. 65-70.

Summary

Influencing a correlation of dependent random vectors and dependent random variables on limit distributions of their sums is rotined.

Поступила в редакцию 19.11.01.