УДК 519.21

Ф. Д. Коршков

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

В литературе [1, 2, 3] рассматривается стационарный режим некоторых типов одноканальных систем массового обслуживания (СМО) с ограниченной очередью.

В данной работе получены рекуррентные соотношения для аппроксимации вероятностей состояний и вероятности отказа в стационарном режиме для одноканальной системы массового обслуживания с ограниченной очередью с рекуррентным однородным входящим потоком и рекуррентным обслуживанием (СМО типа GI |G |1 |n, где n – число мест для ожидания, $n \geq 1$).

Теорема 1.

Пусть

$A(t)$ – функция распределения (ф. р.) длительности промежутка между заявками входящего потока интенсивности λ;

$B(t)$ – ф.р. длительности обслуживания интенсивности μ;

$\rho = \lambda / \mu$ - загрузка СМО (допускается $\rho \geq 1$);

p_k ($k=0, 1, \ldots n+1$) – соответственно вероятности состояний S_k СМО, когда в ней находится k заявок;

$p_k(t)$ – вероятность поступления k заявок за промежуток времени t в рекуррентном потоке, определяемом ф. р. $A(t)$.

Тогда система рекуррентных соотношений для вероятностей состояний имеет вид

$$p_1 = p_0 \lambda \int_0^\infty (1 - A(t))(1 - B(t))\, dt + p_1 \lambda \int_0^\infty (1 - A(t))(1 - B(t))\, dt ;$$

$$p_2 = p_0 \lambda \int_0^\infty p_1(t)(1 - B(t))\, dt + p_1 \lambda \int_0^\infty p_1(t)(1 - B(t))\, dt +$$

$$p_2 \lambda \int_0^\infty (1 - A(t))(1 - B(t))\, dt ;$$

…

$$p_k = p_0\lambda\int_0^\infty p_{k-1}(t)(1-B(t))\,dt + p_1\lambda\int_0^\infty p_{k-1}(t)(1-B(t))\,dt + \ldots +$$

$$+ p_s\lambda\int_0^\infty p_{k-s}(t)(1-B(t))\,dt + \ldots + \cancel{p_k}\lambda\int_0^\infty (1-A(t))(1-B(t))\,dt;$$

$(1 \le k \le n;\quad 1 \le s \le k);$

...

$$p_{n+1} = p_0\lambda\sum_{r=0}^{\infty}\int_0^\infty p_{n+r}(t)(1-B(t))dt + p_1\lambda\sum_{r=0}^{\infty}\int_0^\infty p_{n+r}(t)(1-B(t))dt + \ldots$$

$$+ p_s\lambda\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^\infty p_{n+1-s+r}(t)(1-B(t))dt + \ldots + p_n\lambda\sum_{r=0}^{\infty}\int_0^\infty p_{1+r}(t)(1-B(t))dt;$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n+1} p_k.$$

Доказательство.

Вывод первого уравнения системы рекуррентных соотношений.

В стационарном режиме в произвольный момент времени СМО может находиться в состоянии S_1 с вероятностью p_1, что может получиться в двух случаях

1). В некоторый момент времени до рассматриваемого момента поступила заявка в состояние S_0, в котором СМО находится с вероятностью p_0, обслуживание не закончилось и ни одна заявка не поступила. Вероятность перехода из состояния S_0 в состояние S_1 за малый промежуток времени □t равна $p_0\lambda(1-A(t))(1-B(t))$□t. Суммируя по всем t, получаем первое слагаемое.

2). В некоторый момент времени до рассматриваемого момента закончилось обслуживание заявки и началось обслуживание новой заявки, которая находилась в очереди (СМО находилась в состоянии S_2 с вероятностью p_2). Вероятность перехода из состояния S_2 в состояние S_1 за малый промежуток времени □t совпадает с вероятностью перехода из состояния S_1 в состояние S_2 и равна $p_1\lambda(1- A(t))(1-B(t))$□t (обслуживание не закончилось, и новая заявка не поступила). Суммируя по всем t, получаем второе слагаемое.

Аналогично доказываются другие уравнения системы рекуррентных соотношений.

В частном случае для СМО GI|G|1|1 (одно место для ожидания) система уравнений для нахождения аппроксимации вероятностей состояний в стационарном режиме имеет вид

$$\begin{cases} p_1 - p_0\lambda\int_0^\infty (1-A(t))(1-B(t))\,dt + p_1\lambda\int_0^\infty (1-A(t))(1-B(t))\,dt; \\ p_2 = p_0\lambda\int_0^\infty A(t)(1-B(t))\,dt + p_1\lambda\int_0^\infty A(t)(1-B(t))\,dt; \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Теорема 2.

Для GI|G|1|n вероятность отказа $p_{отк} = p_{n+1}$. (1)

Доказательство.

$1-p_0$ – вероятность того, что заявка находится на обслуживании;

$T\lambda$ - среднее количество заявок, поступивших за длительный промежуток времени T;

$(1-p_0)T\mu$ - среднее число заявок, обслуженных за длительный промежуток времени T;

$\frac{T\lambda-(1-p_0)T\mu}{T\lambda}$ - доля заявок, получивших отказ.

Отсюда получаем при $T\to\infty$ вероятность отказа.

Если сложить все рекуррентные соотношения, то получим равенство

$$1=p_0+p_1\rho+p_2\rho+\ldots+p_n\rho \Rightarrow 1-p_0=\rho(1-p_{n+1}) \Rightarrow p_{n+1}=1-\frac{1-p_0}{\rho}.$$

Равенство (1) доказано.

Рассмотрим некоторые типы систем с ограниченной очередью, используя теоремы 1, 2.

1. Система $M|M|1|n$ (пуассоновский входящий поток, показательное обслуживание).

Получаем известные результаты, приведенные в [1].

$$p_k=\begin{cases}\frac{1-\rho}{1-\rho^{n+2}}\rho^k, & (0\le k\le n+1);\\ 0, & (k>n+1).\end{cases}$$

2. Система $M|E_2|1|1$ (обслуживание эрланговское второго порядка с ф. р. $B(t)=1-e^{-\mu\lambda t}-\mu te^{-\mu t}$ и интенсивностью $\mu/2$, загрузка системы $\rho=2\lambda/\mu$).

Система уравнений

$$\begin{cases} p_1=p_0\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})e^{-\lambda t}dt+p_1\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt;\\ p_2=p_0\lambda\int\limits_0^\infty(1-e^{-\lambda t})(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt+p_1\lambda\int\limits_0^\infty(1-e^{-\lambda t})(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt;\\ p_0+p_1+p_2=1.\end{cases}$$

Решение системы.

$$p_0=\frac{1}{\frac{\rho^3}{4}+\rho^2+\rho+1};\quad p_1=p_0\left(\frac{\rho^2}{4}+\rho\right);\quad p_2=p_0\left(\frac{\rho^3}{4}+\frac{3\rho^2}{4}\right).$$

3. Система $E_2|M|1|1$(входящий поток эрланговский второго порядка с ф. р. $A(t)=1-e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t}$ и интенсивностью $\lambda/2$, загрузка системы $\rho=\lambda/2\mu$).

Система уравнений

$$\begin{cases} p_1=p_0\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty(e^{-\lambda t}+\lambda te^{-\lambda t})e^{-\mu t}dt+p_1\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty(e^{-\lambda t}+\lambda te^{-\lambda t})e^{-\mu t}dt;\\ p_2=p_0\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty(1-e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t})e^{-\mu t}dt+p_1\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty(1-e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t})e^{-\mu t}dt;\\ p_0+p_1+p_2=1.\end{cases}$$

Решение системы

$$p_0=\frac{3\rho+1}{4\rho^3+4\rho^2+4\rho+1};\quad p_1=p_0\cdot\frac{4\rho^2+\rho}{3\rho+1};\quad p_2=p_0\cdot\frac{4\rho^3}{3\rho+1}.$$

4. Система D|D|1|1 (входящий поток и обслуживание детерминированные).

При $\rho\le 1$ получаем систему

$$\begin{cases} p_1=p_0\lambda\int\limits_0^{1/\mu}dt+p_1\lambda\int\limits_0^{1/\mu}dt;\\ p_2=0;\\ p_0+p_1+p_2=1.\end{cases}$$

Решение системы

$p_0=1-\rho$, $p_1=\rho$, $p_2=0$, $p_{отк}=0$.

При $\rho>1$ получаем систему

$$\begin{cases} p_1=p_0\lambda\int\limits_0^{1/\lambda}dt+p_1\lambda\int\limits_0^{1/\lambda}dt;\\ p_2=p_0\lambda\int\limits_{1/\lambda}^{1/\mu}dt+p_1\lambda\int\limits_{1/\lambda}^{1/\varpi}dt;\\ p_0+p_1+p_2=1.\end{cases}$$

Решение системы

$p_0=0$; $p_1=1/\rho$; $p_2=1-1/\rho$; $p_{отк}=p_2$.

5. Система $E_2|E_2|1|1$ (входящий поток и обслуживание эрланговские второго порядка, загрузка системы $\rho=\lambda/\mu$).

Система уравнений

$$\begin{cases} p_1=p_0\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\infty}(e^{-\lambda t}+\lambda te^{-\lambda t})(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt+\\ p_1\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\infty}(e^{-\lambda t}+\lambda te^{-\lambda t})(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt;\\ p_2=p_0\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\infty}(1-e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t})(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})+\\ p_1\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\infty}(1-e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t})(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt;\\ p_0+p_1+p_2=1.\end{cases}$$

Решение системы

$$p_0=\frac{2\rho+1}{\rho^4+3\rho^3+3\rho^2+3\rho+1};\quad p_1=\frac{\rho^3+3\rho^2+\rho}{\rho^4+3\rho^3+3\rho^2+3\rho+1};$$

$$p_2=\frac{\rho^4+2\rho^3}{\rho^4+3\rho^3+3\rho^2+3\rho+1}.$$

6. Система $M|E_2|1|2$ (загрузка СМО $\rho=2\lambda/\mu$).

Система уравнений

$$p_1 = p_0\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt + p_1\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt;$$

$$p_2 = p_0\lambda\int_0^\infty \lambda te^{-\lambda t}(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt + p_1\lambda\int_0^\infty \lambda te^{-\lambda t}(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt +$$

$$+ p_2\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt;$$

$$p_3 = p_0\lambda\int_0^\infty (1-e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t})(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt +$$

$$+ p_1\lambda\int_0^\infty (1-e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t})(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt + + p_2\lambda\int (1-e^{-\lambda t})(e^{-\mu t}+\mu te^{-\mu t})dt;$$

$$p_0+p_1+p_2+p_3=1.$$

Решение системы

$$p_0 = \frac{\frac{\rho}{2}+1}{\frac{\rho^6}{32}+\frac{5\rho^5}{16}+\rho^4+\frac{3\rho^3}{2}+\frac{3\rho^2}{2}+\frac{3\rho}{2}+1};$$

$$p_1 = \frac{\left(\frac{\rho}{4}+1\right)\cdot\left(\frac{\rho}{2}+1\right)}{\frac{\rho^6}{32}+\frac{5\rho^5}{16}+\rho^4+\frac{3\rho^3}{2}+\frac{3\rho^2}{2}+\frac{3\rho}{2}+1};$$

$$p_2 = \frac{\left(\frac{\rho^3}{8}+\frac{3\rho^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{\rho}{2}+1\right)^2}{\frac{\rho^6}{32}+\frac{5\rho^5}{16}+\rho^4+\frac{3\rho^3}{2}+\frac{3\rho^2}{2}+\frac{3\rho}{2}+1};$$

$$p_3 = \frac{\frac{\rho^6}{32}+\frac{9\rho^5}{32}+\frac{11\rho^4}{16}+\frac{\rho^3}{2}}{\frac{\rho^6}{32}+\frac{5\rho^5}{16}+\rho^4+\frac{3\rho^3}{2}+\frac{3\rho^2}{2}+\frac{3\rho}{2}+1}.$$

Для рассмотренных систем при различных значениях загрузки СМО вычислены значения вероятностей состояний и вероятностей отказа. При больших значениях загрузки СМО достаточно одного-двух мест для ожидания, чтобы вероятность простоя была близка к нулю. Результаты, полученные в статье, можно использовать при расчете числа мест для ожидания, если нужно учитывать стоимость места ожидания.

Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979 – 432с.

2. Гнеденко Б. В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987. – 336с.

3. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. – М.: изд-во РУДН, 1995. – 530с.