МАТЭМАТЫКА

УДК 519.240

М.Д. Юдин

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ДИСПЕРСИЯМИ

При решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для зависимых случайных величин [1-4] мы исследовали в основном достаточные условия сходимости распределений их сумм к каждому безгранично делимому распределению. При этом были получены канонические представления логарифмов характеристических функций (х.ф.) предельных распределений, обобщающие известные формулы Колмогорова и Леви-Хинчина (см., например, [5-7]).

Данная работа направлена на выявление необходимых условий сходимости распределений сумм зависимых случайных величин к безгранично делимому распределению.

Основными ограничениями зависимости берутся условие равномерно сильного перемешивания (р.с.п.) и m-зависимость [4;6].

1^0. Пусть $\{X_{ns}\}_{s=1}^n$, $n=\overline{1,\infty}$ - система серий случайных величин, определенных при каждом n на общем вероятностном пространстве. Существование математических ожиданий (м.о.) величин X_{ns} не предполагается.

Положим:

$$\overline{X}_{ns}=\begin{cases} X_{ns}, & |X_{ns}|\le H, \\ 0, & |X_{ns}|>H, \end{cases} \qquad \overline{\overline{X}}_{ns}=\begin{cases} 0, & |X_{ns}|\le H, \\ X_{ns}, & |X_{ns}|>H, \end{cases} \tag{1}$$

где $H\ge H_0>0$, H_0 - фиксированное число. Обозначим: $b_{ns}=M(X_{ns};|X_{ns}|\le H_0)$, $\eta_{ns}=X_{ns}-b_{ns}$, $\overline{\eta}_{ns}=\overline{X}_{ns}-b_{ns}$, $\overline{\overline{\eta}}_{ns}=\overline{\overline{X}}_{ns}$. В системе серий $\{\eta_{ns}\}_{s=1}^n$, $n=\overline{1,\infty}$ величины η_{ns} центрированы «усеченными» м.о. b_{ns} и $\eta_{ns}=\overline{\eta}_{ns}+\overline{\overline{\eta}}_{ns}$.

При $H=H_0$ в (1) $\overline{\eta}_{ns}$ будем обозначать через $\widetilde{\eta}_{ns}$. Так $M\widetilde{\eta}_{ns}=0$.

Ниже с одной чертой сверху обозначаются суммы величин $\overline{\eta}_{ns}$ или $\widetilde{\eta}_{ns}$, с двумя - суммы величин $\overline{\overline{\eta}}_{ns}$.

Сделаем разбиение суммы $S_n=\sum_{s=1}^{n}\eta_{ns}$ по методу Бернштейна:

$$U_{ni}=\sum_{s=(i-1)k+(i-1)m+1}^{ik+(i-1)m}\eta_{ns},\ V_{ni}=\sum_{s=ik+(i-1)m+1}^{ik+im}\eta_{ns},\ i=\overline{1,\nu},\ S_{n1}=\sum_{i=1}^{\nu}U_{ni},\ S_{n2}=\sum_{i=1}^{\nu}V_{ni}, \tag{2}$$

$S_n=S_{n1}+S_{n2}$. В (2) можно считать, что n кратно $k+m$ (см [4], стр. 45).

Обозначим

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dP\{U_{ni} \le x\}, \qquad Q_n(x) = \sum_{i=1}^{\nu} M\left(\frac{U_{ni}^2}{1+U_{ni}^2}; U_{ni} \le x\right),$$

$h(n)$ - медленно меняющаяся функция при $n \to \infty$ [6].

<u>Теорема 1.</u> *Пусть система серий* $\{X_{ns}\}$ *удовлетворяет условию р.с.п. с коэффициентом* $b(t)$, *таким, что* $\sum_{\tau=1}^{\infty} \beta^{\frac{1}{2}}(\tau) < \infty$; *кроме того, найдутся постоянные* H_0, H_1, H_2 *такие, что при* $n \ge n_0$ *и* $H = H_0$ *в (1)*

$$\max_s M\tilde{\eta}_{ns}^2 \le \frac{H_1 h(n)}{n}, \qquad \max P\left\{\left|\overline{\overline{\eta}}_{ns}\right| > 0\right\} \le \frac{H_2 h(n)}{n}.$$

Тогда

1) класс предельных распределений суммы S_n *необходимо совпадает с классом безгранично делимых распределений;*

2) для того чтобы суммы S_n *имели предельное распределение с логарифмом х.ф.*

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2} dQ(x) + it\gamma, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы $Q_n(x) \xrightarrow{вп} Q(x)$, $\gamma_n \to \gamma$ *при* $n \to \infty$.

<u>Замечание.</u> Из доказательства п.1) теоремы 1 необходимо последует, что логарифм х.ф. предельного распределения суммы S_n представляется в форме (3), где $Q(x)$ - ограниченная неубывающая функция, причем $Q(-\infty)=0$, γ - действительная постоянная, а подынтегральное выражение при $x = 0$ равно $-\frac{t^2}{2}$ [6;7].

<u>Доказательство теоремы 1.</u> Возьмем в разбиении (2) $k = \left[n^{1-\rho}\right]$, $m = \left[n^{\frac{\rho}{2}}\right]$, $0 < \rho < \frac{2}{3}$, в (1) $H = H_0$. Согласно неравенству (1.17) из [4], стр. 40, (первоисточник -[6]) и условию теоремы

$$\max M\tilde{U}_{ni}^2 \le \frac{H_1 kh(n)}{n} + \frac{4H_1 kh(n)}{n}\sum_{\tau=1}^{k-1}\beta^{\frac{1}{2}}(\tau) \le \frac{Ckh(n)}{n}.$$

Отсюда и неравенства Чебышева

$$\max_i P\{|U_{ni}| > \varepsilon\} \le \max_i\left(P\left\{\left|\tilde{U}_{ni}\right| > \varepsilon\right\} + P\left\{\left|\overline{\overline{U}}_{ni}\right| > 0\right\}\right) \le$$

$$\frac{\max M\tilde{U}_{ni}^2}{\varepsilon^2} + \sum_{s=1}^{k} P\left\{\left|\overline{\overline{\eta}}'_{ns}\right| > 0\right\} \le \frac{Ckh(n)}{\varepsilon^2 n} + \frac{H_2 kh(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где η'_{ns} - величины, вошедшие в U_{ni}. Следовательно, в условиях теоремы 1 при таком разбиении (2) величины U_{ni} равномерно бесконечно малые.

С другой стороны,

$$P\{|S_{n2}| > \varepsilon\} \le P\left\{\left|\tilde{S}_{n2}\right| > \varepsilon\right\} + P\left\{\left|\overline{\overline{S}}_{n2}\right| > 0\right\} \le \frac{M\tilde{S}_{n2}^2}{\varepsilon^2} + \frac{H_2 \nu m h(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{4}$$

поскольку, согласно неравенству (1.17) из [4], стр. 40,

$$M\widetilde{S}_{n2}^2=\sum_{i=1}^{\nu}M\widetilde{V}_{ni}^2+2\sum_{i<j}M\widetilde{V}_{ni}\widetilde{V}_{nj}\le\frac{Cvmh(n)}{n}+\frac{4Cvmh(n)}{n}\sum_{\tau=1}^{\nu-1}\beta^{\frac{1}{2}}(k\tau+m(\tau-1))\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Из (4) следует, что $S_{n2}\xrightarrow{P}0$ при $n\to\infty$. Поэтому предельное распределение сумм S_n совпадает с предельным распределением сумм S_{n1} (см. лемму 1.5 из [4], стр.45).

Из условия р.с.п. и неравенства (1.19) из [4], стр. 41, находим

$$\left|\varphi_{S_{n1}}(t)-\varphi_{U_{n1}}(t)\varphi_{U_{n2}}(t)\ldots\varphi_{U_{n\nu}}(t)\right|\le 4\nu\beta(m),$$

где $\varphi_{S_{n1}}(t)$ - х.ф. суммы S_{n1}, $\varphi_{U_{ni}}(t)$ - х.ф. U_{ni}. Здесь $\nu\beta(m)\sim n^{\rho}o(n^{\rho})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{S_{n1}}(t)=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{\nu}\varphi_{U_{ni}}(t).$$

Отсюда следует, что предельное распределение сумм S_{n1} совпадает с предельным распределением сумм $\sum_{i=1}^{\nu}U_{ni}$, $n\to\infty$, в которых величины U_{ni} можно считать a priori независимыми.

Заканчивает доказательство теоремы 1 решение центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм независимых равномерно бесконечно малых случайных величин [5-7].

Аналогичное утверждение верно и для случая m_n-зависимости. А именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть величины системы серий* $\{X_{nq}\}$ $m=m_0n^{\mu}$ *- зависимы, где* m_0 *-любое постоянное число,* $0\le\mu<\frac{1}{4}$; *кроме того найдутся постоянные* n,H_0,H_1,H_2 *такие, что при* $H=H_0$ *в (1) и* $n\ge n_0$ *будут выполняться неравенства*

$$\max_q M\widetilde{\eta}_{ns}^2\le\frac{H_1h(n)}{n},\qquad \max_q P\left\{\left|\overline{\overline{\eta}}_{ns}\right|>0\right\}\le\frac{H_2h(n)}{n^{1-\mu}}. \tag{5}$$

Тогда

1) класс предельных распределений сумм S_n *необходимо совпадает с классом безгранично делимых распределений;*

2) для того чтобы суммы S_n *имели предельное распределение с логарифмом х.ф.*

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dQ(x)+it\gamma,$$

необходимо и достаточно, чтобы $Q_n(x)\xrightarrow{вn}Q(x)$, $\gamma_n\to\gamma$ *при* $n\to\infty$.

Замечание, сделанное к теореме 1, относится и к теореме 2.

Доказательство теоремы 2. Возьмем в разбиении (2) $k = \lfloor m_0 n^{1-\rho} \rfloor$, $m = \lfloor m_0 n^{\mu} \rfloor$, $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1-2\mu\right)$. Пусть в (1) $H = H_0$. Благодаря (5), получаем при $n \to \infty$

$$\max_i M\widetilde{U}_{ni}^2 \le \frac{H_1 k^2 h(n)}{n} \to 0, \qquad P\left\{\left|\overline{\overline{U}}_{ni}\right| > 0\right\} \le \frac{H_2 k h(n)}{n^{1-\mu}} \to 0.$$

Поэтому $\max_i P\{|U_{ni}| > \varepsilon\} \to 0$ при любом $\varepsilon > 0$, т.е. величины U_{ni}, $i = \overline{1, \nu}$, равномерно бесконечно малые при $n \to \infty$.

Далее,

$$P\{|S_{n2}| > \varepsilon\} \le \frac{M\widetilde{S}_{n2}^2}{\varepsilon^2} + \frac{H_2 \nu m h(n)}{n^{1-\mu}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

так как $M\widetilde{S}_{n2}^2 = \sum_{i=1}^{\nu} M\widetilde{V}_{ni}^2 \le \frac{H_1 \nu m^2 h(n)}{n} \to 0$, когда $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1-2\mu\right)$ и $n \to \infty$. Следовательно, предельное распределение сумм S_n совпадает с предельным распределением сумм равномерно бесконечно малых независимых величин $\sum_{i=1}^{\nu} U_{ni}$.

Решение центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм независимых случайных величин [5;6;7] заканчивает доказательство теоремы 2.

2^0. Положим $S_{n(s,p)} = \eta_{n(s+1)} + \ldots + \eta_{np}$, Mns - σ - алгебра, порожденная η_{ns},

$$f_{ns}(t, M_{ns}) = \frac{M\left(e^{itS_{n(s,n)}} / M_{ns}\right)}{M\left(e^{itS_{n(s,p)}}\right)}, \qquad \varphi_{ns}(t) = M\left(e^{it\eta_{ns}} f_{ns}(t, M_{ns})\right).$$

В [4], стр. 43, доказана

Лемма 1. *Пусть система серий* $\{X_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n = \overline{1, \infty}$. *удовлетворяет условию: при любом фиксированном* t

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} |\varphi_{ns}(t) - 1|^2 = 0 \qquad \text{(A).}$$

Тогда, для того чтобы х.ф. $\varphi_n(t)$ *сумм* S_n *сходились к х.ф.* $\varphi(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} (\varphi_{ns}(t) - 1) = \ln \varphi(t). \qquad (6)$$

Введем функции:

$$G_n(t, x) = \sum_{s=1}^{n} M\left(\frac{\eta_{ns}^2}{1+\eta_{ns}^2} f_{ns}(t, M_{ns}); \eta_{ns} \le x\right),$$

$$a_{ns}(t)=M\left(\frac{\eta_{ns}}{1+\eta_{ns}^2}f_{ns}(t,M_{ns})\right), \qquad a_n(t)=\sum_{s=1}^{n}a_{ns}(t).$$

<u>Теорема 3.</u> *Если система серий* $\{X_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$ *удовлетворяет условию (А), то, для того чтобы суммы* S_n *имели предельное распределение с х.ф.* $\varphi(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d_xG_n(t,x)+ita_n(t)=\ln\varphi(t).$$

Доказательство теоремы 3 следует из леммы 1, поскольку по свойству интеграла Стильтеса

$$\sum_{s=1}^{n}(\varphi_{ns}(t)-1)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d_xG_n(t,x)+ita_n(t).$$

3^0. Обозначим:

$$\Psi_n^*(x)=\sum_{s=1}^{n}M\left(\frac{\eta_{ns}^2}{1+\eta_{ns}^2};\eta_{ns}\le x\right),\quad b_n=\sum_{s\ne p}M\tilde{\eta}_{ns}\tilde{\eta}_{np},\quad \gamma_n=\sum_{s=1}^{n}M\frac{\overline{\eta}_{ns}}{1+\overline{\eta}_{ns}^2}.$$

<u>Теорема 4.</u> *Пусть случайные величины системы серий* $\{X_{ns}\}$ $m_n=m_0n^{\frac{1}{8}-\rho}$ *- зависимы, где* m_0 *- любое постоянное число,* $0\le\rho<\frac{1}{8}$*; кроме того найдутся постоянные* n,H_0,H_1,H_2 *и* n *такие, что при* $H\ge H_0$ *в (1) и* $n\ge n_0$ *будут выполняться условия:*

$$\max_{s,q}\sup P\left\{\left|\overline{\eta}_{nq}\right|>0/M_{ns}\right\}\le\frac{g(H)}{n},$$

$$\max_{q} M\overline{\eta}_{nq}^2\le\frac{H_1h(n)}{n}, \qquad \max_{r,s,q}M\left|\overline{\eta}_{ns}\overline{\eta}_{nr}\overline{\eta}_{nq}\right|\le\frac{H_2h(n)}{n^{\frac{3}{2}}},$$

где $0\le|r-s|\le m_0n^{\frac{1}{4}-\rho}$, $0<q-s\le m_0n^{\frac{1}{4}-\rho}$, $g(H)\to0$ *при* $H\to\infty$, H_1 *и* H_2 *- постоянные, которые могут зависеть от* H. *Тогда для того чтобы суммы* $S_n=\sum_{s=1}^{n}\eta_{ns}$ *имели предельное распределение, логарифм х.ф. которого выражается по формуле*

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi(x)+it\gamma,$$

где $\Psi(x)$ *- ограниченная неубывающая функция, причем* $\Psi(-\infty)=0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{H\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$ *и*

$$\Psi_n(x)=\begin{cases}\Psi_n^*(x), & x<0,\\ \Psi_n^*(x)+b_n, & x\ge0\end{cases}\xrightarrow[n\to\infty]{ВП}\Psi(x)<\infty.$$

Доказательство. Возьмем в разбиении (2) $k = \left[m_0 n^{\frac{1}{4}-\rho} \right]$, $m = \left[m_0 n^{\frac{1}{8}-\rho} \right]$, $0 \le \rho < \frac{1}{8}$ и пусть

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nl}, \quad l = \nu k , \tag{7}$$

- система серий величин η_{ns}, вошедших при разбиении (2) в $U_{ni}, i = \overline{1,\nu}$ и взятых в порядке возрастания индексов. Из леммы 3.3 [4], стр. 111, следует, что система (7) удовлетворяет условию (A), и $S_{n2} \xrightarrow{p} 0$. Поэтому предельное распределение сумм S_n совпадает с предельным распределением сумм $S_{n1} = \sum_{s=1}^{l} \xi_{ns}$ и для системы (7) справедливо утверждение теоремы 3.

Составим функции $G_n(t,x)$ и $a_n(t)$ для системы (7). Как показано в доказательстве теоремы 3.3 [4], стр. 118,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{1tx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d_x G_n(t,x) + ita_n(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Psi_n^*(x) + it\gamma_n - \frac{b_n t^2}{2} \xrightarrow[H \to \infty]{n \to \infty} 0$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{1tx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Psi_n^*(x) - \frac{b_n t^2}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{1tx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Psi_n(x),$$

то утверждение теоремы 4 следует из теоремы 3 и свойств формулы Леви-Хинчина, рассмотренных, например в [6;7].

Замечание 1. Условие $m_n = m_0 n^{\frac{1}{8}-\rho}$ -зависимости в теореме 4 можно заменить на условие р.с.п. с коэффициентом $\beta(\tau) = o(\tau^{-3-\varepsilon}), \varepsilon > 0$, но при этом условие $\max_q M\overline{\eta}_{nq}^2 \le \frac{H_1 h(n)}{n}$ заменяется на условие $\max_q M\overline{\eta}_{nq}^2 \le \frac{H_1}{n}$ (см. теорему 3.8 [4], стр. 134).

Пример. Требование ограниченности суммы ковариаций усечений случайных величин необходимо, вообще говоря, ибо в противном случае в предельном распределении их сумм может появиться вырожденный нормальный компонент, а именно с неограниченной дисперсией.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, с плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{1}{4} \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ \frac{1}{x^2}, & |x| > 1, \end{cases} \quad i = \overline{1,\infty}.$$

Определим последовательность m-зависимых величин, положив

$\eta s = X_s + X_{s+1} + \ldots + X_{s+m-1}$, $s = \overline{1,\infty}$.

Пусть

$$\overline{X}_i = \begin{cases} X_i, & |X_i| \le Hn, \\ 0, & |X_i| > Hn, \end{cases} \qquad \overline{\overline{X}}_i = \begin{cases} 0, & |X_i| \le Hn, \\ X_i, & |X_i| > Hn, \end{cases}$$

где $H \ge H_0 > 0$ - постоянная.

Положим $\overline{\eta}_s = \overline{X}_s + \overline{X}_{s+1} + \overline{X}_{s+m-1}$, $\overline{\overline{\eta}}_s = \eta_s - \overline{\eta}_s$ $\xi_{ns} = \frac{\eta_s}{n}$, $s=\overline{1,n}$.

Нетрудно видеть, если величины ξ_{ns}, $\overline{\xi}_{ns} = \frac{\overline{\eta}_s}{n}$, $\overline{\overline{\xi}}_{ns} = \frac{\overline{\overline{\eta}}_s}{n}$ удовлетворяют условиям теоремы 4, то для них будет справедливо и утверждение этой теоремы, так как ход доказательства полностью сохранится. Получаем последовательно:

1. Поскольку

$$\left\{ \ |\overline{\overline{\xi}}_{ns}| > 0 \right\} \subset \left\{ \ |\overline{\overline{X}}_s| > 0 \right\} \cup \ldots \cup \left\{ \ |\overline{\overline{X}}_{s+m-i1}| > 0 \right\},$$

то, когда $Hn>1$,

$$P\left\{ \ |\overline{\overline{\xi}}_{ns}| > 0 \right\} \le \sum_{i=s}^{s+m-1} P\left\{ \ |\overline{\overline{X}}_i| > 0 \right\} \le m \int_{Hn}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{m}{Hn}.$$

2. Так как величины Xi независимы, то

$$M\overline{\xi}^2_{ns} \le \frac{2m}{n^2}\left(\int_0^1 x^2 dx + \int_1^{H_n} x^2 \frac{1}{x^2} dx\right) = \frac{2m}{n^2}\left(\frac{1}{3} + Hn - 1\right) \le \frac{H_1 m}{n}. \qquad (8)$$

3. Из (8) и неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$M\left|\overline{\xi}_{ns}\overline{\xi}_{nr}\overline{\xi}_{nq}\right| \le \frac{H_2 m^{3/2}}{n^{3/2}},$$

где H_2 - некоторая постоянная.

Таким образом, если $m = h(n)$ - медленно меняющаяся функция при $n \to \infty$ и *такая, что* $h(n) \to \infty$, *но* $g(H) = \frac{m}{H} \xrightarrow[H\to\infty]{} 0$, *то все условия теоремы 4 для системы* $\{xns\}$ будут выполнены.

Однако непосредственный подсчет показывает, что (см. п.2)

$$\sum_{s \ne p} M\tilde{\xi}_{ns}\tilde{\xi}_{np} = \frac{nm(m-1)}{4n^2}\left(\frac{1}{3} + H_0 n - 1\right) \sim H_3 m(m-1) \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty.$$

Приведенный пример показывает, что требование равностепенной ограниченности b_n (сверху!), вообще говоря, необходимо.

Литература

1. Юдин М.Д. О предельных распределениях сумм зависимых случайных величин с неограниченными дисперсиями//ДАН БССР. - 1984, т.28, №6. - С.496-498.
2. Юдин М.Д. Об обобщении формулы Колмогорова и Леви-Хинчина на суммы зависимых величин// ДАН БССР. - 1986, т.30, №1. - С.29-31.
3. Юдин М.Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм случайных величин, удовлетворяющих условию перемешивания// Rev. Roum. Math. Pures of Appl. - 1980, т.XXV, №8. -С.1249-1257.
4. Юдин М.Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. - Минск: «Университетское», 1990. - 254с.
5. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.П. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. - М., 1949. -254с.
6. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965. - 524с.
7. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. - М.: Наука, 1972. - 414с.