

МЕТОД ТАБЛИЧНЫХ ФУРЬЕ-ТРАНСФОРМАНТ В РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПЕРЕДАЧИ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ИЗОПЛАНАРНОЙ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМЕ

В математическом моделировании систем дистанционного зондирования особый интерес представляет обратная задача – восстановление исходного изображения по результатам регистрации бортовыми приборами космического аппарата. Математическая формулировка этой задачи в изопланарной системе сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода с разностным ядром

$$Az = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\bar{x} - \bar{s})z(\bar{s})d\bar{s} = u(\bar{x}), u \in U, z \in Z, \quad (1)$$

где z – искомая функция; u – известные входные данные (входная функция); $K(\bar{x} - \bar{s}) \in L_2$ – ядро уравнения (функция влияния); A – линейный оператор преобразования $A: Z \rightarrow U, U \subset L_2$; $\bar{x} = \bar{x}(x_1, x_2)$.

Задача вида (1), как и многие другие обратные задачи, не удовлетворяет критериям корректности [1]. Вследствие этого даже очень малые ошибки правой части $u(\bar{x})$, ядра $K(\bar{x} - \bar{s})$ или погрешности используемого метода приближенного решения могут приводить к катастрофически большим ошибкам в решении.

Решение обратной задачи будем искать в виде

$$z(\bar{x}) = F^{-1}[\check{u}(\bar{\omega}) / \check{K}(\bar{\omega})], \quad (2)$$

где $\check{u}(\bar{\omega}) = F[u(\bar{x})]$ – фурье-образ входной функции, $\check{K}(\bar{\omega}) = F[K(\bar{x})]$ – модуль пространственно-частотной характеристики (ПЧХ).

В реальных физических задачах передача частот ограничена (сверху) [2], в силу чего $\epsilon \leq \check{K}(\bar{\omega}) \leq 1$, где ϵ – некоторое положительное число.

Для решения прямой двумерной задачи передачи изображения $z(x) = F^{-1}[\check{K}(\bar{\omega})\check{u}(\bar{\omega})]$ методом табличных фурье-трансформант в [3] предложены аппроксимации

$$\check{K}(\bar{\omega}) \sim P_m(\bar{\omega}) = \sum_{k=1}^m a_k \exp(-b_k |\bar{\omega}|) \quad (3)$$

$$u(\bar{x}) = u(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} u_{j,k} \left(\arctg \frac{x_1 - x_{1,j}}{\alpha_0} - \arctg \frac{x_1 - x_{1,j+1}}{\alpha_0} \right) \times$$

$$\times \left(\operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_{2,k}}{\alpha_0} - \operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_{2,k+1}}{\alpha_0} \right), \quad (4)$$

где α_0 – малый параметр, величина которого определяется функцией рассеяния оптического звена оптико-электронной системы [2].

Фурье-образ входной функции $u(x_1, x_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\vec{\omega}) = \tilde{u}(\omega_{x_1}, \omega_{x_2}) = & \frac{1}{-\pi^2} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} u_{j,k} \frac{\exp(-\alpha_0(\omega_{x_1} + \omega_{x_2}))}{\omega_{x_1} \omega_{x_2}} (\exp(-i\omega_{x_1} x_{1,j}) - \\ & - \exp(-i\omega_{x_1} x_{1,j+1})) \cdot (\exp(-i\omega_{x_2} x_{2,k}) - \exp(-i\omega_{x_2} x_{2,k+1})). \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда произведение $|\tilde{K}(\vec{\omega})|u(\vec{\omega})$ сводится к табличным фурье-трансформантам, в результате чего необходимость выполнения дискретных фурье-преобразований снимается. Используем эти аппроксимации для некорректно поставленной обратной задачи.

В силу того что экспоненциальный полином (3) оказывается в (2) в знаменателе, функция $\tilde{u}(\vec{\omega}) / \tilde{K}(\vec{\omega})$ уже не сводится в общем случае к табличным фурье-трансформантам.

Регуляризованное решение задачи (1) имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} z(x_1, x_2) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{i,j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i(\omega_1(x_1 - s_{1,i}) + \omega_2(x_2 - s_{2,j}))]}{\tilde{K}(\omega_1, \omega_2)} \times \\ & \times \exp(-\alpha(|\omega_1| + |\omega_2|)) d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\exp(-\alpha|\vec{\omega}|) = \exp(-\alpha(|\omega_1| + |\omega_2|))$ – регуляризирующая функция [4]. Ясно, что если не принять каких-либо аппроксимаций обратного ядра $\tilde{K}^{-1}(\vec{\omega})$, численное решение (6) потребует применения дискретных двумерных преобразований Фурье и трудоемких вычислений.

Решение будем искать в равномерной метрике $Z \subset C$. Численный эквивалент P_m^{-1} ядра обратного оператора можно представить в виде

$$P_m^{-1}(\vec{\omega}) = 1 / \sum_{k=1}^m a_k \exp(-b_k |\vec{\omega}|), \quad 0 \leq |\vec{\omega}| \leq |\omega_n|. \quad (7)$$

Однако для реализации метода табличных трансформант правую часть (7) нужно представить в виде экспоненциального полинома

$$\tilde{K}^{-1}(\vec{\omega}) \sim P_m^{-1}(\vec{\omega}) = \sum_{i=1}^m a'_i \exp(-b'_i |\vec{\omega}|). \quad (8)$$

Тогда эквивалент $P_m^{-1}(\vec{\omega})$ и S-представление (4) входной функции позволяют получить искомое решение через табличные трансформанты.

Для построения аппроксимирующего полинома $P_m^{-1}(\vec{\omega})$ целесообразно воспользоваться тем же алгоритмом вычисления коэффициентов полинома, как и при решении прямой задачи [3].

Пусть ядро $\check{K}(\omega)$ известно в узлах интерполирования. Имеем

$$\check{K}^{-1}(\omega_j) \sim Q(\omega_j), \tag{9}$$

причем в узлах $Q(\omega_j)$ совпадает с $\check{K}^{-1}(\omega_j)$, т.е. $\check{K}^{-1}(\omega_j) = Q(\omega_j)$, $Q(0) \geq 1, Q(\omega_n) > Q(0)$. Примем расчетные амплитудно-частотные характеристики $\check{K}(\omega)$ атмосферы [2] для частот $\omega \in [0,10]$, $[\omega]=\text{км}^{-1}$ при азимутальном угле съемки $\varphi = 0^\circ$ и для длины волны света $\lambda = 0,3471\text{мкм}$. Нормируя $\check{K}(\omega)$ к 1 на частоте $\omega = 0$, получим $\bar{K}(\omega) = \check{K}(\omega) / \check{K}(0)$, а также $K^{-1}(\omega) = 1 / \bar{K}(\omega)$ для $\omega \in [0,10]$. Значения $\check{K}(\omega)$, $\bar{K}(\omega)$ и $K^{-1}(\omega)$ приведены в таблице, а на рисунке графики функций $\check{K}(\omega)$, $\bar{K}(\omega)$. Ясно, что для вычисления полинома $P_m^{-1}(\omega)$ функция $Q(\omega_j)$ непригодна. Вместо $Q(\omega_j)$ введем функцию

$$\bar{Q}(\omega_j) = Q(\omega_j) / Q(\omega_n), \tag{10}$$

нормированную к 1 при $\omega = \omega_n$. Заметим, что асимптотика $1 - \bar{Q}(\omega_j)$ напоминает таковую для $\check{K}(\omega)$. Введем новую функцию

$$P'(\omega_j) = 1 - \bar{Q}(\omega_j) + \bar{Q}(0), \tag{11}$$

нормированную к 1 при $\omega = 0$, стремящуюся к ϵ при $\omega \rightarrow \omega_n$.

Таблица

Построение эквивалента ядра обратного оператора

ω	$\check{K}(\omega)$	$\bar{K}(\omega)$	$K^{-1}(\omega)$	$\bar{Q}(\omega)$	$1 - \bar{Q}(\omega)$	$P'(\omega_j)$	$P^{-1}(\omega)$
0	0.488	1	1	0.0859	0.9141	1	1
0.01	0.455	0.9324	1.0725	0.0921	0.9079	0.9938	1.0722
0.1	0.356	0.7295	1.3708	0.1177	0.8823	0.9682	1.3701
0.5	0.207	0.4242	2.3574	0.2022	0.7978	0.8837	2.3545
1	0.154	0.3156	3.1686	0.2721	0.7279	0.8138	3.1686
2	0.111	0.2275	4.3956	0.3774	0.6226	0.7085	4.3950
3	0.0885	0.1814	5.5127	0.4733	0.5267	0.6126	5.5120
4	0.0743	0.1523	6.5660	0.5638	0.4362	0.5221	6.5660
5	0.0646	0.1324	7.5529	0.6485	0.3515	0.4374	7.5525
6	0.0572	0.1172	8.5324	0.7326	0.2674	0.3533	8.5320
8	0.0484	0.0992	10.0807	0.8655	0.1345	0.2204	10.080
10	0.0419	0.0859	11.6468	1	0	0.0859	11.646

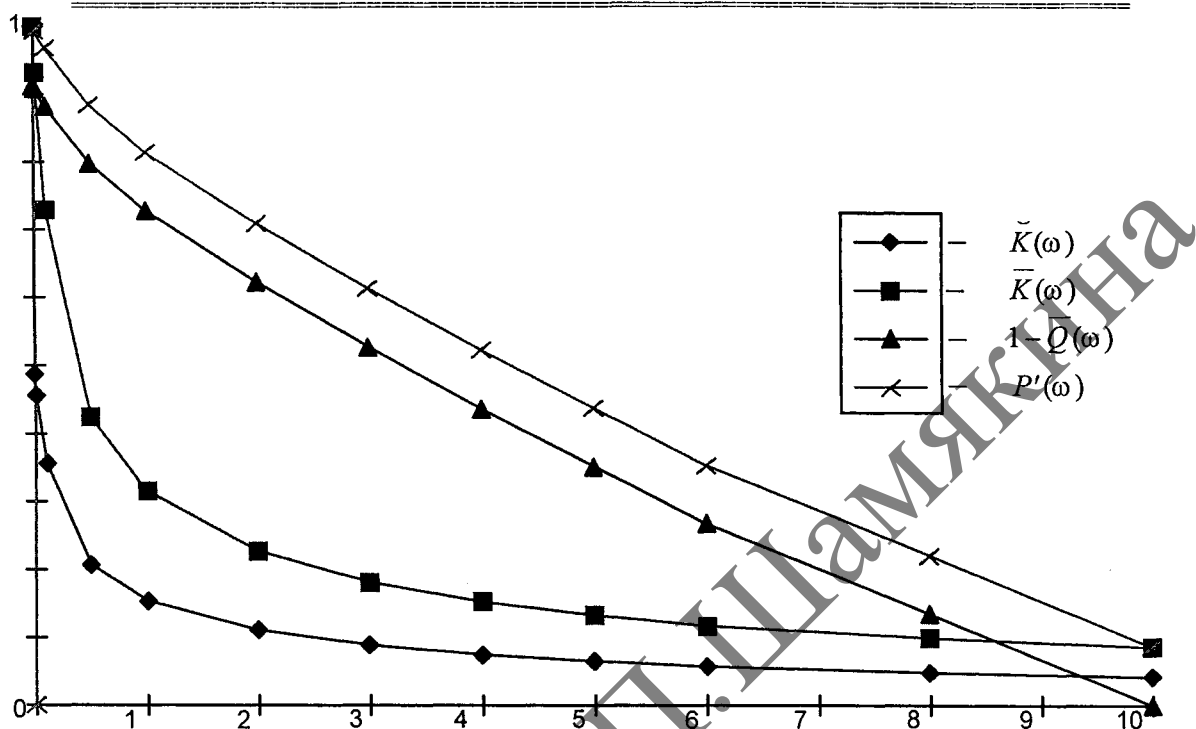


Рисунок зависимости $\tilde{K}(\omega)$, $\bar{K}(\omega)$, $1 - \bar{Q}(\omega_j)$, $P'(\omega)$
от пространственной частоты ω

Функция $P'(\omega_j)$ известна в точках (узлах j) и пригодна для вычисления коэффициентов a'_j, b'_j экспоненциального полинома (8). Зависимости (9)-(11) дают выражение для искомого полинома $P_m^{-1}(\omega)$ – эквивалента ядра обратного оператора. Имеем

$$P_m^{-1}(\omega_j) = Q(\omega_j) = Q(\omega_n) \bar{Q}(\omega_j) = Q(\omega_n) [1 - P'(\omega_j) + \bar{Q}(0)]. \quad (12)$$

В таблице приведены проведенные расчеты $P_m^{-1}(\omega)$ для частот $\omega \in [0, 10]$. При предлагаемой аппроксимации расхождение $P_m^{-1}(\omega)$ с $K^{-1}(\omega)$ наблюдается только в четвертом знаке.

Приближенное регуляризованное решение обратной задачи определяется функционалом

$$z_\alpha(x) \approx F^{-1}[P_m^{-1}(\omega) \check{u}(\omega)]. \quad (13)$$

Тем самым справедлива следующая

Теорема. Решение обратной задачи в оптико-электронной изопланарной системе может быть представлено в виде суперпозиции трех слагаемых

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3, \quad (14)$$

где

$$z_1(x_1, x_2) = \frac{1}{|\tilde{K}(0)| |\tilde{K}(\omega_n)|} u(x_1, x_2), \quad (15)$$

$$z_2(x_1, x_2) = \frac{1}{|\tilde{K}(\omega_n)|} u(x_1, x_2), \quad (16)$$

$$z_3(x_1, x_2) = -\frac{1}{|\check{K}(\omega_n)|} F^{-1}[P'(\omega)\check{u}(\omega)]. \quad (17)$$

Очевидно, слагаемые z_1 и z_2 представляют собой передачу входной функции без искажений, но в масштабе $1/|K_0|K(\omega_n)$, $1/|K(\omega_n)|$.

Из графика функции $P'(\omega_j)$ видно, что эта функция более "плавная", по крайней мере для функции $\check{K}(\omega)$ атмосферной оптики. Следовательно, ее можно аппроксимировать меньшим числом экспонент.

Литература

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Начала теории вычислительных методов. Интегральные уравнения, некорректные задачи и улучшение сходимости. – Мн.: Наука и техника, 1984. – 263 с.
2. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. – М.: Наука, 1990. – 296 с.
3. Дорошева Л.В. Аппроксимация оптической передаточной функции опико-электронной системы дистанционного зондирования // Сб. научных работ препод. физ.-мат. факультета. – Мозырь: МГПИ им. Н.К. Крупской, 2001. – С. 12-20.
4. Мозалевский В.В., Дорошева Л.В. О выборе параметра и функции регуляризации при решении некорректной обратной задачи в опико-электронной системе // Вестник БГУ. Сер.1. Физ.-мат. информ. – 1995. – № 2. – С. 11-13.

Summary

The method of a numerical solution of incorrect and opposite task of the image transfer in the isoplanar system is presented in the article. This method is based on the A. N. Tikhonov's regularization method and on the usage of the table Fourier transformant. It gives the possibility to lower the calculation difficulties to solve the tasks and to make the processing of optico-electronic systems faster.

Поступила в редакцию 25.09.03.