

## МАТЭМАТЫКА

УДК 519.240

С.Н. Гуз, М.Д. Юдин

### КОНСТРУКТОР ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

**Введение.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  – вероятностное пространство, на котором определено случайное поле с выборочными функциями  $f(\omega, x_1, x_2, \tau)$ , где  $\tau$  – время,  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Например,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  – пространство, на котором произошла Чернобыльская авария,  $f(\omega, x_1, x_2, \tau)$  – реализованная выборочная функция – степень радиоактивной зараженности местности. Реализацией выборочной функции случайного поля может быть поверхностная деформация твердого тела и т.д. Естественно, в этом случае ни a priori, ни a posteriori описать все события  $\omega$ , вообще говоря, невозможно, поэтому базовое вероятностное пространство можно считать виртуальным.

Мы рассматриваем реализации выборочной функции случайного поля как стохастически непрерывный случайный процесс  $S(\tau)$ . Здесь предлагаются вероятностные методы моделирования двумерных случайных процессов  $S(\tau)$ , образующих данные реализации выборочных функций случайных полей. При этом мы исходим из того, что

1. Каждый стохастически непрерывный случайный процесс на отрезке  $[0, \tau]$  равномерно непрерывен на этом отрезке [1]. Поэтому его можно представить как сумму равномерно бесконечно малых приращений при неограниченном дроблении времени, и, следовательно, можно будет применить результаты решения центральной предельной проблемы теории вероятностей, причем без предположения независимости приращений процесса [2-4]. Условия теорем в [2-4] естественны, мы будем считать их выполненными.

2. Каждое безгранично делимое распределение представимо в виде свертки нормального (в частности, вырожденного) и конечного или счетного числа распределений Пуассона (см., например, [5]). Поэтому при моделировании мы ограничиваемся свертками таких распределений.

3. Реальные реализации выборочных функций сложны. Их, вообще говоря, нельзя смоделировать одним распределением. Поэтому в данной работе мы предполагаем набор относительно простых распределений (конструктор), моделирующих элементарные части выборочных функций, имея в виду, что подходящая линейная комбинация распределений конструктора даст модель всей реализации.

4. При вероятностном моделировании мы получаем теоретическую плотность вероятности процесса  $S(\tau)$  в момент времени  $\tau$ . Предполагается, что путем варьирования параметров плотности можно будет добиться достаточного приближения плотности с реализацией случайного поля. После этого плотность с точностью до коэффициента вертикального масштаба становится теоретической выборочной функцией  $f(\omega, x_1, x_2, \tau)$ , зависящей от времени  $\tau$ .

5. Дальнейшая интерполяция ее параметров по промежуточным измерениям как функций времени приведет к возможности прогнозирования эволюции данной реализации случайного поля. Работа в данном направлении уже началась (см., например, [6]).

1<sup>0</sup>. **Базовые теорема и концепция.** Пусть  $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , – система серий  $d$ -мерных случайных векторов, определенных при каждом  $n$  на общем вероятностном пространстве, имеющих ограниченные дисперсии, нулевые математические ожидания (м.о.) и принимающих значения в  $\mathbb{R}^d$ ,  $\xi_{ns} = (\xi_{ns}^{(1)}, \dots, \xi_{ns}^{(d)})$ ,  $M\xi_{ns} = 0$ ,  $x, t \in \mathbb{R}^d$ ,  $t = (t_1, \dots, t_d)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $(x, t)$  – скалярное произведение,  $B_n = \|b_{n(i,j)}\|$  – симметричная матрица, элементы которой

$$b_{n(i,j)} = \sum_{0 \leq |s-p| \leq m_n} M(\xi_{ns}^{(i)} \xi_{np}^{(j)}; |\xi_{ns} \leq \varepsilon|, |\xi_{np} \leq \varepsilon|), \text{ где } \varepsilon > 0, m_n \text{ определяется в}$$

теореме 1. Неравенство  $\xi_{ns} \leq x$  означает, что  $\xi_{ns}^{(i)} \leq x_i$ ,  $i = \overline{1, d}$  [7],  $h(n)$  – медленно меняющаяся функция при  $n \rightarrow \infty$  [8].

В [2] доказана

**Теорема 1.** Пусть система серий векторов  $\{\xi_{ns}\}$   $m_n = m_0 n^{1/8-p}$  – зависящая, где  $m_0$  – любое постоянное число,  $0 < p \leq 1/8$ , кроме того, найдутся постоянные  $H_1, H_2$  и  $n_0$  такие, что при  $n \geq n_0$

$$\max_{s,i} M \xi_{ns}^{(i)2} \leq \frac{H_1 h(n)}{n}, \quad \max_{s,r,q,i,j,k} M |\xi_{ns}^{(i)} \xi_{nr}^{(j)} \xi_{nq}^{(k)}| \leq \frac{H_2 h(n)}{n^{3/2}}, \quad (1)$$

где  $0 \leq |r - q| \leq m_0 n^{1/4-p}$ ,  $0 < |s - q| \leq m_0 n^{1/4-p}$ . Тогда, если при  $n \rightarrow \infty$

$$K_n(x) = \sum_{i=1}^n M(\xi_{ns}^2; \xi_{ns} \leq x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a \in E} K(x), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B,$$

то суммы  $S_n$  будут иметь безгранично делимое предельное распределение логарифмической характеристической функции (х. ф.) которого

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)) \frac{1}{|x|^2} dK(x) - \frac{(t, B t^*)}{2}, \quad (2)$$

где  $t^*$  – вектор-столбец, а из области интегрирования исключен нуль-вектор.

В [3] показано, что утверждение теоремы 1 останется верным, если условие  $m_n$ -зависимости заменить условием равномерно сильного перемешивания [8], коэффициент которого

$$\beta(\tau) = o(\tau^{-3-\delta}), \quad \delta > 0, \quad \text{при этом первое из условий (1) заменяется на } \max_{s,i} M \xi_{ns}^{(i)2} \leq \frac{H_1}{n}.$$

В данной работе используется широко апробированная концепция [9-14] продвижения выборочной функции по данному направлению, а именно: приращения процесса  $S(\tau)$  делятся на два вида: относительно малые приращения броуновского типа, которых подавляющее большинство, и относительно редкие большие приращения, могущие делиться на группы по длинам, вызванные, например, или массопереносом в диффузионных процессах, или прорывами «стопоров» в процессах деформаций и разрушений.

Приращения первого типа вносят в распределение  $S(\tau)$  в момент  $\tau$  нормальный компонент, второго типа – пуассоновские компоненты.

**2<sup>o</sup>. Моделирование по линейным направлениям.** Пусть  $\eta_{ns} = (\eta_{ns}^{(1)}, \eta_{ns}^{(2)})$  – двумерный

вектор-приращение процесса  $S(\tau)$  за время  $\Delta\tau_{ns}$ ,  $\{\eta_{ns}\}_{s=1}^n$  – серия приращений,  $S(\tau) = \sum_{s=1}^n \eta_{ns}$ ,

$$\tau = \sum_{s=1}^n \Delta\tau_{ns}, \quad \xi_{ns} = \eta_{ns} - M\eta_{ns}.$$

Наличие относительно больших приращений размера  $|x_0|$  вдоль прямой  $x = k x_0$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ ,  $k \geq 0$  выражается условием; для любой  $\delta$ -окрестности  $v$  точки  $x_0$ ,  $\delta \in (0, |x_0|)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \int_v x^2 dP\{\xi_{ns} \leq x\} = \lambda > 0 \quad (3)$$

наличие большого числа малых приращений – условием: при любом  $\varepsilon \in (0, |x_0|)$

$$\sum_{s=1}^n M(\xi_{ns}^2; |\xi_{ns}| \leq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 0. \quad (4)$$

Кроме того, нужно добавить: при любых  $\delta, \varepsilon \in (0, |x_0|)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \int_{v_0 \cup v} x^2 dP\{\xi_{ns} \leq x\} = 0, \quad (5)$$

где  $v_0 - \varepsilon$  – окрестность нуль-вектора.

Заметим, что значения  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$  войдут соответственно в предел матрицы  $B_n$ . Зависимость между приращениями отразится теми частями элементов  $b_{n(i,j)}$ , в которых  $s \neq p$ .

Естественно считать, что  $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^n$  –  $n$ -я серия теоретической системы серий, которая получается при неограниченном дроблении времени  $\tau$ , таком, что  $\max_s \Delta\tau_{ns} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и что система  $\{\xi_{ns}\}$  удовлетворяет условиям теоремы 1, т.е. суммы  $S_n = \sum_{s=1}^n \xi_{ns}$  имеют предельное распределение, логарифм х.ф. которого выражается по формуле (2), где  $d = 2$ ,

$$B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (2) и условий (3)-(5) следует, что сумма  $S_n$  будет иметь предельное распределение, логарифм х.ф. которого

$$\psi(t) = \lambda \left( e^{i(t,x)} - 1 - i(t, x_0) \right) - \frac{(t, Bt^*)}{2}, \quad (6)$$

где  $t = (t_1, t_2)$ . Если при этом  $\sum_{s=1}^n M\eta_{ns} \rightarrow \ell_0$ ,  $\ell_0 = (\ell_0^{(1)}, \ell_0^{(2)})$ , то из (6) получим, что  $S(\tau)$  в направлении полупрямой  $x = k x_0$  будет иметь теоретическую плотность вероятности

$$p^{(1)}(x) = \frac{e^{-\lambda} \sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z, B^{-1}z^*)\right\}, \quad (7)$$

где  $z = x - (\ell_0 - \lambda x_0) - mx_0$ .

На рис. 1 дано компьютерное изображение поверхности плотности (7) [13; 15; 18] при  $\lambda = 1.5$ ,  $c_{11} = c_{22} = 3$ ,  $c_{12} = c_{21} = 2$ , где  $c_{ij}$  – элементы матрицы  $B^{-1}$ .

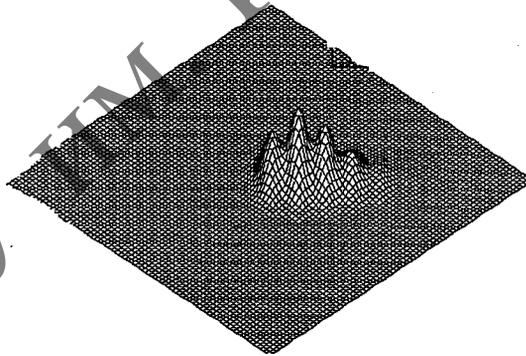


Рис. 1

На прямой  $x = k x_0$  может быть расположено несколько точек-носителей пуассоновской вероятности:  $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$ ,  $i = \overline{1, \nu}$ . В этом случае условие (2) примет вид: для любого  $\delta < \min_i (|x_i - x_{i-1}|, |x_i|)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \int_{v_i} x^2 dP\{\xi_{ns} \leq x\} = \lambda_i, \quad i = \overline{1, \nu} \quad (8)$$

где  $v_i$  –  $\delta$ -окрестности точек  $x_i$ . Условие (5) заменится на

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \int_{\bigcup_{i=0}^{\nu} v_i} x^2 dP\{\xi_{ns} \leq x\} = 0 \quad (9)$$

при любых  $\delta, \varepsilon < \min(|x_i - x_{i-1}|, |x_i|)$ . Из (4), (8), (9) и (2) следует, что в этих условиях предельное распределение суммы  $S_n$  будет иметь плотность вероятности

$$p^{(\nu)}(x) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i} \sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{\forall m_i=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_{\nu}^{m_{\nu}}}{m_1! m_2! \dots m_{\nu}!} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z, B^{-1} z^*)\right\}, \quad (10)$$

где  $z = x - \left(\ell_0 - \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i\right) - \sum_{i=1}^{\nu} m_i x_i$ . Вид поверхности плотности (10) при  $\nu = 2$  приведен в [16], [19].

На рис. 2 дано изображение поверхности (10) при  $\nu = 2$   $\lambda_1 = 0.5$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $x_1 = (1, 0)$ ,  $x_2 = (2, 0)$ ,  $c_{11} = c_{22} = 10$ ,  $c_{12} = c_{21} = 1$ .

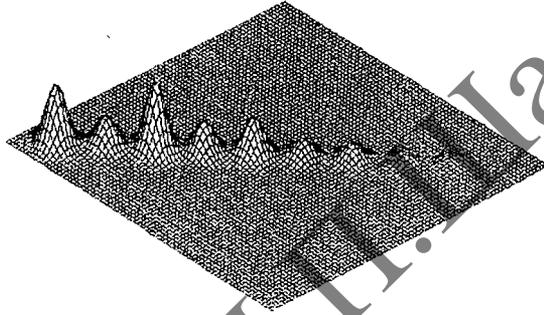


Рис. 2

3°. **Конструирование моделей звездных выборочных функций.** Расположим точечные носители пуассоновской вероятности на разных лучах прямых, выходящих из начала координат. Тогда линейная комбинация плотностей вида (7), (10) даст плотность звездного вида [13; 20]:

$$p(x) = \sum_{i=1}^k q_i p_i^{(\nu_i)}(x), \quad (11)$$

где  $k$  – число лучей,  $\nu_i$  – число носителей пуассоновской вероятности на  $i$ -ом луче,  $q_i > 0$ ,

$\sum_{i=1}^k q_i = 1$ ,  $p_i^{(\nu_i)}(x)$  – плотность на  $i$ -ом луче.

Компьютерные изображения поверхностей плотностей (11) даны в [13; 20]. На рис. 3 изображена поверхность плотности (11) с одноточечными носителями пуассоновской вероятности на каждом луче при  $k = 5$ ,  $\lambda_i = 2$ ,  $q_i = 1/5$ ,  $i = \overline{1, 5}$ ,  $c_{11} = c_{22} = 4$ ,  $c_{12} = c_{21} = 1$ ,  $\ell_0 = 1$ .

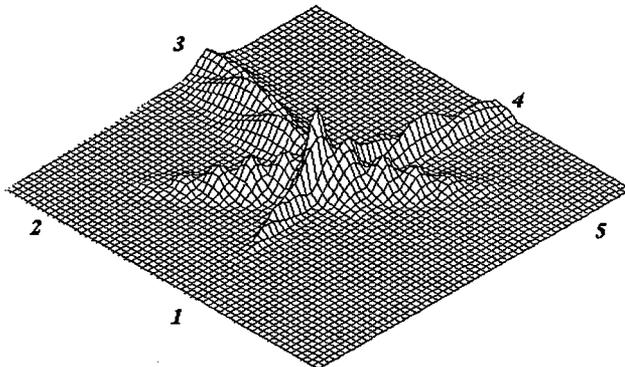


Рис. 3

4<sup>0</sup>. **Конструирование моделей звездных с ответвлениями выборочных функций.** Введем новую систему координат, параллельную основной системе, с началом в точке  $a_{ij} = (a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)})$ , расположенной на  $i$ -ом луче п. 3<sup>0</sup>. Пусть в новой системе координат движение выборочной функции пошло с основного луча в направлении точки  $y_{ij}$  – носителя пуассоновской вероятности  $\lambda_{ij}$ , т.е. при любом достаточно малом  $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \int_{v_{ij}} y^2 dP\{\xi_{ns} \leq y\} = \lambda_{ij},$$

где  $v_{ij}$  –  $\delta$ -окрестность точки  $y_{ij}$ . Здесь  $i = \overline{1, k}$  – число основных лучей,  $j = \overline{1, \mu}$  – число ответвлений  $i$ -го луча. Поскольку новые и старые координаты связаны соотношением  $y = x - a_{ij}$ , то теоретическая плотность вероятности при одном точечном носителе пуассоновской вероятности на основном луче и ответвлении выражается по формуле [14] (в основной системе координат):

$$p_{ij}(x) = \frac{e^{-\lambda_{ij}} \sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{ij}^m}{m!} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z_{ij}, B^{-1} z_{ij})\right\} \quad (12)$$

где  $j = 0$  соответствует  $i$ -му основному лучу и  $z_{i0} = x - (\ell_0 - \lambda_{i0} x_{i0}) - m x_{i0}$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $j = 0$ ,  $z_{ij} = x - (\ell_0 - \lambda_{ij}(x_{ij} - a_{ij})) - m(x_{ij} - a_{ij})$ ,  $x_{ij} = y_{ij} + a_{ij}$ ,  $j = \overline{1, \mu}$ .

Плотность вероятности звездного с ответвлениями распределения мы получим путем взвешенного суммирования плотностей вида (12):

$$p(x) = \sum_{i,j} q_{ij} p_{ij}(x), \quad (13)$$

где  $q_{ij} > 0$ ,  $\sum_{i,j} q_{ij} = 1$ . Компьютерное изображение поверхности плотности вида (13) получено в

[14]. На рис. 4 изображена поверхность плотности (13) при  $k = 5$ ,  $i = \overline{1, 5}$ ,  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\mu_3 = 1$ ,  $\mu_4 = 1$ ,  $\mu_5 = 1$ ,  $\lambda_{1j} = 4$ ,  $q_{ij} = 0.1$  при всех  $i, j$ ,  $c_{11} = c_{22} = 8$ ,  $c_{12} = c_{21} = 2$ .

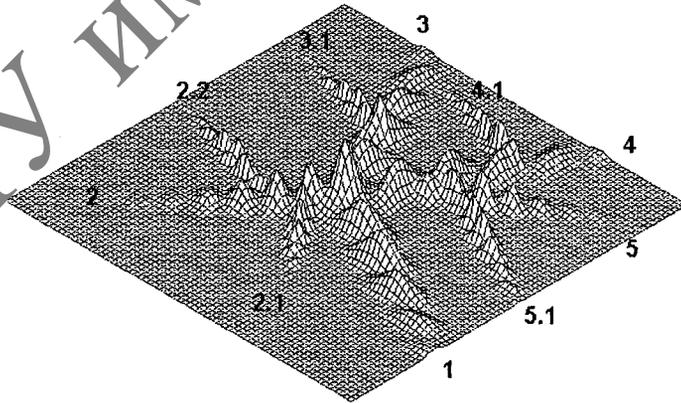


Рис. 4

5<sup>0</sup>. **Модели волнообразной выборочной функции.** Поверхности плотностей (7), (10) направлены вдоль полупрямых  $x = kx_0$ ,  $k \geq 0$ , идущих под некоторым углом  $\alpha$  к оси  $x_j$ . Предположим, что положение носителя пуассоновской вероятности, точки  $x_0$ , случайно расположено на некотором контуре  $\Gamma$ . Возьмем точку  $x_0$  в тригонометрической форме  $x_0 = (r_0 \cos \alpha, r_0 \sin \alpha)$ , где  $r_0$  – расстояние точки  $x_0$  до начала координат. На контуре  $\Gamma$   $r_0 = r_0(\alpha)$ ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . Полагая, что  $\alpha$  – случайная величина, например, равномерно распределенная на отрезке  $[0, 2\pi]$ , по формуле полной вероятности получим из (7) плотность вероятности, моделирующую в некотором приближении волнообразную выборочную функцию, имеющую вершины волн на контуре  $\Gamma$  и на контурах,

расстояния которых от начала координат кратны расстояниям точек контура  $\Gamma$  до начала координат:

$$u_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p^{(1)}(x, \alpha) d\alpha. \quad (14)$$

Впервые изображения поверхностей вида (14) было получено в [21, 22]. На рис. 5 дано одно из изображений поверхности (14) при  $\lambda = 3$ ,  $c_{11} = 1$ ,  $c_{12} = c_{21} = 1$ ,  $c_{22} = 4$ . Указан и вид контура  $\Gamma$ .

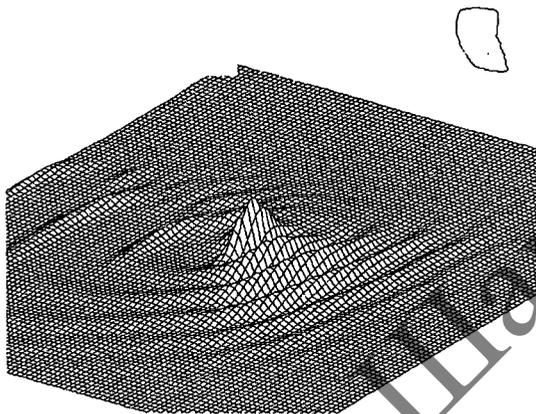


Рис. 5

Если выбрать по тому же принципу  $\nu$  контуров с равномерно распределенными точечными носителями пуассоновской вероятности на каждом из них, то из (10) получим моделирующую плотность вероятности

$$u_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p^{(\nu)}(x, \alpha) d\alpha. \quad (15)$$

Можно взять, вообще говоря, любое распределение носителей пуассоновской вероятности на контурах. Как при этом изменится формула (14), мы считаем очевидным. Параметры плотностей под интегралами могут зависеть от времени.

Если контур  $\Gamma$  незамкнутый, то формула (14) примет вид:

$$u_1(x) = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p^{(1)}(x, \alpha) d\alpha. \quad (16)$$

Аналогично изменится (15).

Изображение поверхности (16) дано на рисунке 6 [21, 22] при  $\lambda = 2$ ,  $c_{11} = 2$ ,  $c_{12} = c_{21} = 1$ ,  $c_{22} = 2$ .

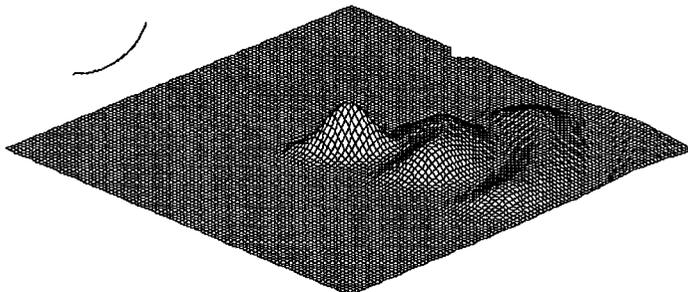


Рис. 6

**6<sup>0</sup>. Конструирование моделей сложных волнообразных выборочных функций.** Складывая с вероятностными весами поверхности (14)-(16), с различными наборами контуров и дуг и различными началами координат (см. п. 4<sup>0</sup>), получим модель выборочной функции – сложную волнообразную поверхность или их ансамбль:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n q_i u_v^{(i)}(x), \tag{17}$$

где  $q_i > 0, \sum_i q_i = 1$ .

Разумеется, (17) можно сочетать с (13).

**7<sup>0</sup>. Моделирование «пупырчатых» выборочных функций.** Если точечные носители пуассоновской вероятности  $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$  не лежат на одной прямой, то формула (2) даст композицию (свертку) пуассоновских распределений вдоль прямых  $x = k x_i$  и общего нормального распределения с ковариантной матрицей  $B^{-1}$ . Плотность вероятности этой композиции будет выражаться по формуле (9), но ее поверхность будет «пупырчатой» и будет простираться не вдоль полупрямой, а над некоторой частью плоскости  $x_1 O x_2$ . Например [15]: пусть  $v_1$  и  $v_2$  –  $\delta$ -окрестности точек (1; 0) и (0; 1) при любом  $\delta \in (0; 1)$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{v_i} x^2 dP\{\xi_{ns} \leq x\} = \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда при выполнении (4) и (9) из формулы (2) получим свертку двух пуассоновских распределений вдоль координатных осей и двумерного нормального распределения с ковариационной матрицей  $B^{-1}$ , т.е.

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^m \lambda_2^k}{m! k!} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - q, B^{-1}(x - q)^*)\right\}, \tag{18}$$

где  $x = (x_1, x_2)$ , вектор  $q = \ell_0 - \lambda - (m, k)$ ,  $\ell_0 = (\ell_0^{(1)}, \ell_0^{(2)})$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ .

Компьютерное изображение поверхности (18) дано на рис. 7. Здесь  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $c_{11} = c_{22} = 50$ ,  $c_{12} = c_{21} = 2$ .

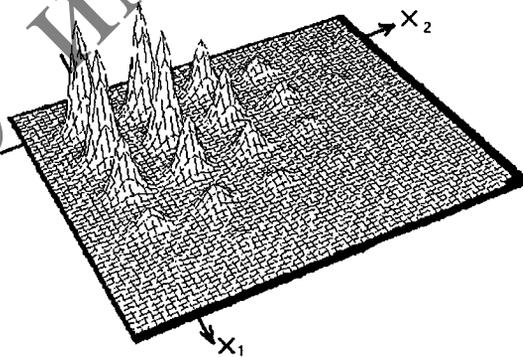


Рис. 7

Заметим, что мы значительно расширим виды «пупырчатых» поверхностей плотности при аффинных преобразованиях системы координат. Кроме того, «пупырчатые» поверхности можно сочетать со всеми поверхностями, рассмотренными в п.п. 1<sup>0</sup>-6<sup>0</sup>.

**Вывод.** Таким образом, практически любую сложную конфигурацию реализации выборочной функции  $f(\omega, x_1, x_2, \tau)$  случайного поля, определенного на некотором, возможно виртуальном, вероятностном пространстве, можно смоделировать, сконструировать подходящей линейной комбинацией поверхностей, рассмотренных в п.п. 1<sup>0</sup>-7<sup>0</sup>, варьируя входящие в их уравнения параметры

Кроме того, если путем определений значений параметров моделирующих поверхностей в различные моменты времени удастся получить по этим значениям интерполирующие функции

времени, то появится возможность прогнозировать эволюцию выборочной функции. В частности, эволюцию последствий некоторого форс-мажора, например, радиоактивной зараженности местности от аварии на Чернобыльской АЭС. При этом если бы в уравнения моделирующих поверхностей не удалось бы ввести параметры, отражающие зависимость между приращениями процесса, то эти уравнения были бы принципиально неверны.

#### *Литература*

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
2. Юдин М.Д. Об обобщении формулы Колмогорова на суммы зависимых случайных векторов // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 4. – С. 61-64.
3. Yudin M.D. About limiting distributions of the sums of intermixing random vectors with restricted variances // Buletinul Academice stiinte a Republicii Moldova. – 2002. – № 1(38). – P. 104-109.
4. Юдин М.Д. О предельных распределениях сумм зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 19-23.
5. Лозв М. Теория вероятностей. – М.: ИЛ, 1962. – 720 с.
6. Гуз С.Н., Юдин М.Д. Один подход к моделированию пятен радиоактивной зараженности. Часть 1. Линейные направления // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага інстытута імя Н.К. Крупскай. – 2001. – № 5. – С. 15-19.
7. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
8. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
9. Башмаков В.И., Чикова Т.С., Юдин М.Д. Распределение трещин по размерам в кристаллических телах. // ДАН БССР. – 1983. – Т. 27. – № 4. – С. 326-328.
10. Сергиевич Н.В., Юдин М.Д. Один подход к моделированию диффузионных процессов в металлополимерах // VIII Белорусская математическая конференция. Тезисы докладов. – 2000, ч. 2. – С. 169.
11. Сергиевич Н.В., Шилько С.В., Юдин М.Д. Автолокализация дефектов в адаптивных композитах: вероятностная модель процесса // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т. 6. – № 4. – С. 504-509.
12. Юдин М.Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. – Мн.: Университетское, 1990. – 254 с.
13. Юдин М.Д., Сергиевич Н.В., Шилько С.В. Локализация дефектов в твердых телах. Часть 1. Вероятностная модель поверхностного разрушения кристаллов // Материалы. Технологии. Инструменты. – 1999. – № 3. – С. 5-8.
14. Юдин М.Д., Сергиевич Н.В., Шилько С.В. Локализация дефектов в твердых телах. Часть 2. Учет разветвления трещин // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2000. – № 5. – С. 18-21.
15. Гуз С.Н., Сергиевич Н.В., Юдин М.Д. О влиянии зависимости случайных слагаемых на предельные распределения их сумм // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 3. – С. 30-34.
16. Гуз С.Н., Сергиевич Н.В., Юдин М.Д. Сложное пуассоновское распределение в моделировании некоторых деформаций // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага інстытута імя Н.К. Крупскай. – 1999. – № 2. – С. 26-30.
17. Юдин М.Д. Сложное пуассоновское распределение в теории деформаций и разрушений // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 6. – С. 62-64.
18. Киселев С.А. Влияние зависимости на предельных распределения сумм зависимых случайных векторов // Материалы VIII студенческой конференции. Часть 1. Мозырь, 2001. – С. 13-14.
19. Чикова Т.С., Сергиевич Н.В. Математическое моделирование роста клиновидного механического двойника в реальном кристалле // Мозырь: Педуниверситет, 2002, – 60 с.
20. Сергиевич Н.В., Юдин М.Д. О вероятностных основах моделирования звездных деформаций // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага інстытута імя Н.К. Крупскай. – 2000. – № 3. – С. 21-23.
21. Сергиевич Н.В. О двумерном моделировании диффузионного процесса, когда носителем пуассоновской вероятности является дуга // Материалы VIII студенческой конференции. Часть 1. Мозырь, 2001. – С. 9-13.

---

22. Сергиевич Н.В. О роли параметров в одной модели диффузионного процесса // 36. науковых работ аспирантаў. – Мазыр: МазДП, 1998. – С. 100.

*Summary*

The elementary parts of sample functions of a random field are modelled as stochastically continuous stochastic processes with dependent increments.

The gang of idealized densenesses of probabilities for simulation composite stochastically of continuous processes with dependent increments is reduced.

*Поступила в редакцию 07.04.03.*