УДК 378.637:514

И.Н. Кралевич

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ: ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ К ИЗЛОЖЕНИЮ

Раздел «Основания геометрии» играет первостепенную роль в профессиональной подготовке будущего специалиста. Традиционно при изложении указанного раздела дается исторический обзор обоснования геометрии, освещается роль работ Н.И. Лобачевского, которые, как известно, привели к широким обобщениям в геометрии и их важнейшим приложениям в различных разделах математики и естествознания, приводятся понятия сферической и эллиптической геометрий.

Новые подходы к организации учебного процесса в высшей школе предполагают переход к непрерывному образованию *исследовательского типа*. Мы ставим своей ***целью*** организацию введения студентов в научное исследование путем расширения возможностей изложения раздела «Основания геометрии».

В большинстве своем такие разделы, как аналитическая геометрия, конструктивная геометрия, дифференциальная геометрия, оставляют впечатление о возможности только одной геометрии, законы которой заранее предопределены. ***Ведущая идея*** в предлагаемой нами методике изложения – геометрия не является навсегда предписанной системой понятий и теорем, геометрическая интуиция способна создать свою геометрию для каждой новой сферы познания.

I этап. Создание проблемной ситуации: действительно ли теоремы геометрии выполняются в окружающем нас пространстве ?

Общая постановка вопроса предполагает исторический обзор обоснования геометрии, в результате которого определяются две основные точки зрения на предмет геометрии [1, 340]:

групповая точка зрения, изложенная Ф. Клейном в «Эрлангенской программе», в соответствии с которой в основу геометрии того или иного пространства положена определенная группа преобразований;

точка зрения Д. Гильберта, когда в основу геометрии положена структура пространства, определенная некоторой системой аксиом.

II этап. Геометрия Н.И. Лобачевского – новый период в развитии естествознания.

Излагаются общие вопросы аксиоматики, элементы геометрии Лобачевского, демонстрируется роль работ Н.И. Лобачевского, приведших к широким обобщениям в геометрии и их важнейшим приложениям в математике и естествознании. Опровергается взгляд на то, что евклидова геометрия – единственно возможное учение о пространстве.

III этап. Научный поиск: точна ли карта земной поверхности?

Сферическая геометрия (отличие от планиметрии можно обнаружить в сколь угодно малой части сферы).

Основные определения.

Свойства сферической геометрии:

1.2.1. Т е о р е м а. Кривая наименьшей длины, лежащая на сфере S и соединяющая точки P и Q этой сферы, – это дуга большого круга сферы S, проходящая через P и Q [2; 3].

1.2.2. Окружность радиуса ρ в сферической геометрии – множество точек, удаленных от одной фиксированной точки на расстоянии ρ. Если радиус сферы S равен R, то $\rho = R\varphi$, где φ – величина угла в радианной мере между лучами, идущими из центра сферы в центр окружности и в одну из ее точек. С точки зрения обычной геометрии, мы имеем дело с окружностью радиуса ρ'. Из рис. 1.2.2 $R \sin \varphi = R \sin(\rho/R)$. Поэтому длина этой окружности равна $2\pi\rho'$, то есть $2\pi R \sin(\rho/R)$. Итак, окружность радиуса ρ имеет в сферической геометрии иную длину, чем в планиметрии и это отличие обнаруживается на сколь угодно малых окружностях.

1.2.3. Определим длину отрезка PQ, соединяющего две точки большой окружности сферы S. Сферическое расстояние между точками P и Q, принадлежащими сфере S, обозначим $d(P, Q)$. Итак, проводя рассуждения аналогично [1, 334], получим: $\rho(P,Q) = 2R\sin[d(P,Q)/2R]$.

1.2.4. Т е о р е м а. Сумма углов любого треугольника в сферической геометрии больше двух прямых, то есть больше π [3, 13].

1.2.5. Т е о р е м а (теорема синусов для сферического пространства).

Пусть $a = d(B,C)$, $b = d(A,C)$, $c = d(A,B)$ – стороны сферического треугольника ABC, а R – радиус сферы. Тогда [1, 335]

$$\frac{\sin\hat{A}}{\sin\frac{a}{R}} = \frac{\sin\hat{B}}{\sin\frac{b}{R}} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\frac{c}{R}}.$$

Вывод: представленная геометрия отличается от геометрии на плоскости даже в достаточно малых частях. Обнаруженное отклонение сферической геометрии от планиметрии позволяет сделать вывод, что невозможна точная карта даже достаточно малой части сферы. Однако, чем меньше область на сфере по сравнению с радиусом сферы, тем более точную наглядную картину мы получим. Это следует из формул длины окружности, доказательства теоремы о сумме углов треугольника.

Рассмотрим геометрию, которая отличается от геометрии на плоскости, но совпадает с ней в своих достаточно малых частях.

IV этап. Новые результаты:

2. Геометрия на цилиндрической поверхности (отличие от планиметрии нельзя обнаружить в сколь угодно малой части поверхности).

2.1.Основные определения.

2.2. Свойства геометрии на цилиндрической поверхности:

2.2.1. Т е о р е м а. При наложении полосы на цилиндрическую поверхность Е любая кривая, содержащаяся в полосе, накладывается на кривую, лежащую на поверхности и имеющую ту же длину [3,16].

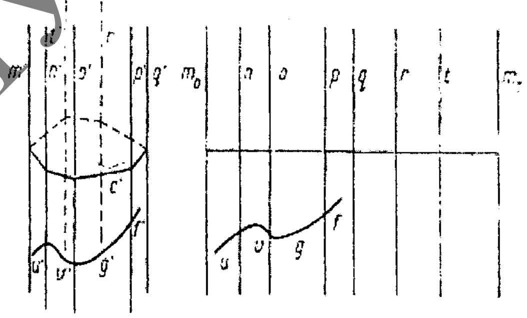

Рис. 1

Однако из равенства длин кривых неверно, что расстояние между точками полосы равно расстоянию между теми точками поверхности Е, на которые они накладываются.

2.2.2. Т е о р е м а. Расстояние между точками У и R цилиндрической поверхности равно длине наикратчайшей из таких линий f в полосе m_0m_1, что f распадается на кривые $f_1, f_2 ..., f_n$:

f_1 начинается в точке S, на которую развертывается P, f_n заканчивается в точке T, на которую развертывается R, а f_i заканчивается и f_{i+1} начинается в противоположных точках (для i = 1, 2, ... n–1) [3, 19].

В правиле для измерения расстояний, сформулированном в теореме 2.2.2, можно избавиться от использования разрывных линий.

Замечание: при изображении точек цилиндра точками полосы m_0m_1 не всякая такая область изобразится полосой. При этом изображении необходимо заменить точки такой полосы ширины $s' < s/2$ эквивалентными им точками полосы m_0m_1. При этом полоса, ограниченная прямыми *p* и *q*, изобразится в полосе m_0m_1 в виде двух полос (Рис. 2).

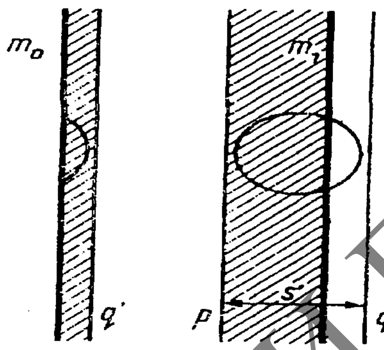

Рис. 2

2.2.3. Теорема (основное свойство геометрии на поверхности Е). Геометрия на цилиндрической поверхности Е совпадает с геометрией на плоскости в достаточно малых областях. Такой областью является, например, любой круг радиуса r < s/4, где s – длина направляющей с' [3, 25].

2.2.4. *Свойства прямых* [3, 25].

Итак, геометрия на цилиндрической поверхности во многом отличается от геометрии на плоскости, но этих отличий нельзя обнаружить, если не выходить за пределы круга радиуса r < s/4.

V. *Поиск:* один из нерешенных вопросов математики – описание совокупности геометрий, в малом совпадающих с плоскостью Лобачевского.

На наш взгляд, включение предложенных нами элементов в изложение раздела «Оснований геометрии», поможет раскрыть самую важную черту математики: внутреннее развитие математики, когда нужды одной области приводят к созданию новых областей, дополняется поразительным явлением ее единства – теории, созданные и развивающиеся в разных направлениях, оказываются тесно связанными.

Литература

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. Ч.2. – М.: Просвещение, 1987.
2. Адамар Ж. Элементарная геометрия: Учеб. пособие. В 2 ч. Ч.2 (стереометрия). – М.: Учпедгиз, 1958.
3. Никулин В.В., Шафаревич И.Р. Геометрии и группы. – М.: Наука, 1983.

Summary

The author's technique of introduction of the students in scientific research in educational process is submitted by expansion of opportunities of the unit «the Bases of geometry».

Поступила в редакцию 01.11.02.