УДК 517.917

В.В. Шкут

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИМЕЮЩЕЙ ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВИДЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

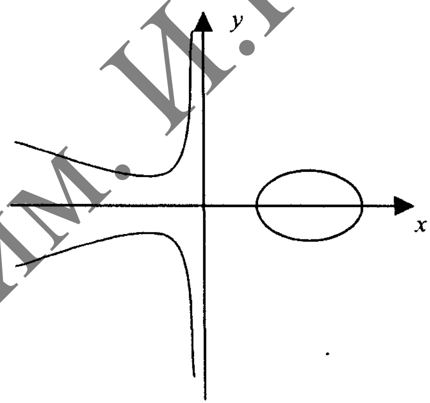
В данной работе проводится качественное исследование дифференциальной системы:

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=2}^{3}a_{ij}x^iy^j,\ \frac{dy}{dt}=x+\sum_{i+j=2}^{3}b_{ij}x^iy^j, \qquad (1)$$

где $a_{ij},\ b_{ij}\in R$, при условии, что кривая (см. [1, 49]).

$$\omega(x,y)\equiv xy^2+x^2+px+q=0,\ \ p^2-4q>0,\ \ p<0,\ \ q>0 \qquad (2)$$

является частным интегралом системы (1). Кривая (2) состоит из двух бесконечных ветвей и овала и имеет вид:



Лемма. Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (pb_{12}-1)xy + \frac{(p^2-2q)b_{12}-p}{q}x^2y \equiv P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= x + \frac{(4q-p^2)b_{12}+p}{2q}x^2 + \frac{1-pb_{12}}{2}y^2 + b_{12}xy^2 \equiv Q(x,y). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для доказательства леммы достаточно воспользоваться равенством [2]: если кривая $\omega(x,y)=0$ – частный интеграл системы, то

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot P(x,y) + \frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot Q(x,y) \equiv F(\omega,x,y), \tag{4}$$

где $F(0,x,y)=0$. В данном случае равенство (4) имеет вид:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot P(x,y) + \frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot Q(x,y) \equiv \frac{p^2b_{12}-p}{q}xy\cdot\omega(x,y). \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что ось Oy – частный интеграл системы (3) и поле направлений, определяемое системой (3), симметрично относительно оси Ox. Следовательно, предельных циклов система (3) не имеет.

Замечание. Если $pb_{12}=1$, то ось Oy – особая линия системы (3). Считаем далее, что $pb_{12}\neq 1$.

Найдем особые точки системы (3) в конечной части плоскости. Из (5) видно, что возможные особые точки системы (3) лежат на линиях $x=0$, $y=0$, $\omega(x,y)=0$. Для отыскания особых точек в конечной части плоскости нужно решить систему

$$\left.\begin{aligned} &xy\left((pb_{12}-1)q + \left((p^2-2q)b_{12}-p\right)x\right)=0, \\ &2qx + \left((4q-p^2)b_{12}+p\right)x^2 + (1-pb_{12})qy^2 + 2qb_{12}xy^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Пусть $x=0$ или $y=0$. Тогда получим особую точку

$$x_1=0,\ y_1=0, \tag{7}$$

а также особую точку

$$x_2 = \frac{2q}{(p^2-4q)b_{12}-p},\ \ y_2=0, \tag{8}$$

если $(4q-p^2)b_{12}+p\neq 0$.

Пусть $xy\neq 0$. Тогда система (6) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &(pb_{12}-1)q + \left((p^2-2q)b_{12}-p\right)x = 0, \\ &xy^2 + x^2 + px + q = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Система (9) имеет решение, если $(p^2-2q)b_{12}-p\neq 0$. При этом условии получаем возможные особые точки системы (3), лежащие на овале кривой (2):

$$x_{3,4} = \frac{(pb_{12}-1)q}{(2q-p^2)b_{12}+p},\ \ y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{\left((4q-p^2)b_{12}^2+1\right)q}{(1-pb_{12})\left((2q-p^2)b_{12}+p\right)}}. \tag{10}$$

Находим теперь характеристические числа особых точек (7), (8) и (10). Они, соответственно, такие:

$$\lambda_1=\lambda_2=0; \tag{7'}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{(pb_{12}-1)x_2 + \frac{(p^2-2q)b_{12}-p}{q}x_2^2}; \tag{8'}$$

$$\lambda_1 = (1-pb_{12})y_{3,4};\ \ \lambda_2 = \frac{p(1-pb_{12})^2}{(2q-p^2)b_{12}+p}y_{3,4}. \tag{10'}$$

Далее находим особые точки системы (3) в бесконечной части плоскости. Для этого к системе (3) применяем последовательно преобразования Пуанкаре [3]:

$$x=\frac{1}{z},\ \ y=\frac{u}{z}\ \text{ и }\ x=\frac{v}{z},\ \ y=\frac{1}{z},\ \ \frac{dt}{z^2}\to dt.$$

Получим системы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=\frac{\left(4q-p^2\right)b_{12}+p}{2q}z+\frac{\left(3q-p^2\right)b_{12}+p}{q}u^2+z^2+\frac{pb_{12}-1}{2}u^2z,\\ \frac{dz}{dt}&=\frac{\left(2q-p^2\right)b_{12}+p}{q}uz+\left(1-pb_{12}\right)uz^2,\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=\frac{\left(p^2-3q\right)b_{12}-p}{q}v^2+\frac{pb_{12}-1}{2}vz-\frac{\left(4q-p^2\right)b_{12}+p}{2q}v^3z-v^2z^2,\\ \frac{dz}{dt}&=-b_{12}vz-\frac{1-pb_{12}}{2}z^2-\frac{\left(4q-p^2\right)b_{12}+p}{2q}v^2z^2-vz^3.\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

Полагая в правых частях системы (11) $z=0$ и приравнивая их к нулю, видим, что «концы» оси Ox – особая точка системы (3) с характеристическими числами $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Так как правые части системы (12) обращаются в нуль при $v=z=0$, то «концы» оси Oy являются особой точкой системы (3). Замечаем, что в системе (12) отсутствуют линейные части.

Замечание. Если $\left(3q-p^2\right)b_{12}+p=0$, то экватор сферы Пуанкаре – особая линия. Считаем, что $\left(3q-p^2\right)b_{12}+p\neq 0$.

Выясним характер особых точек системы (3). Сначала покажем, что сложная особая точка (7) системы (3) является четырехсепаратрисным седлом при любых допустимых значениях параметров $p,\ q,\ b_{12}$. Система (3) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt}=\eta(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=x+\xi(x,y).$$

Находим решение уравнения $x+\xi(x,y)=0$ относительно x в виде $x\equiv\varphi(y)=\alpha_2y^2+\ldots$ Получаем $x\equiv\varphi(y)=\frac{pb_{12}-1}{2}y^2+\ldots$ Далее находим

$$f(y)\equiv\eta(\varphi(y),y)=\frac{(pb_{12}-1)^2}{2}y^3+\ldots\equiv ay^{\alpha}+\ldots.$$

Видим, что $a=\frac{(pb_{12}-1)^2}{2}>0$ и $\alpha=3$ – нечетное. Согласно [4, 128], точка (7) – четырехсепаратрисное седло. Характер остальных особых точек системы (3) выясняется при изменении значений параметра b_{12} от $-\infty$ до $+\infty$. Исследование системы (3) разбивается на три случая: 1) $2p^2-9q>0$; 2) $2p^2-9q=0$; 3) $2p^2-9q<0$. Результаты исследования приведены в таблице:

1	2	3	4	5	6	7	8
№ п/п	p $p,\ q,\ b_{12}$	$p,\ q,\ b_{12}$	Характер особых точек				
			7	8	10	∞	
						«концы» Ox	«концы» Oy индекс Пуанкаре
1	$2p^2\text{-}9q>0$	$b_{12}<p/\left(p^2-4q\right)$	С	С	У,У	ГППЭ	0
2		$b_{12}=p/\left(p^2-4q\right)$	С	–	У,У	ГППП	0
3		$\frac{p}{p^2-4q}<b_{12}<\frac{p}{p^2-3q}$	С	С	У,У	ГППЭ	0
4		$\frac{.p}{p^2-3q}<b_{12}<-\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}$	С	С	У,У	С	2

5		$b_{12} = -1/\sqrt{p^2-4q}$	С	ГППЭ	–	С	2
6		$\frac{-1}{\sqrt{p^2-4q}} < b_{12} \le \frac{p}{p^2-2q}$	С	Ц	–	С	2
7		$\frac{p}{p^2-2q} < b_{12} < \frac{1}{p}$	С	Ц	С,С	ГППЭ	2
8		$\frac{1}{p} < b_{12} < \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}$	С	Ц	–	ГППЭ	0
9		$b_{12} = 1/\sqrt{p^2-4q}$	С	ГППЭ	–	ГППЭ	0
10		$b_{12} > 1/\sqrt{p^2-4q}$	С	С	У,У	ГППЭ	0
11	$2p^2-9q=0$	$b_{12} < 9/p$	С	С	У,У	ГППЭ	0
12		$b_{12} = 9/p$	С	–	У,У	ГППП	0
13		$9/p < b_{12} < 3/p$	С	С	У,У	ГППЭ	0
14		$3/p < b_{12} \le 9/5p$	С	Ц	–	С	2
15		$9/5p < b_{12} < 1/p$	С	Ц	С,С	ГППЭ	2
16		$1/p < b_{12} \le -3/p$	С	Ц	–	ГППЭ	0
17		$b_{12} = -3/p$	С	ГППЭ	–	ГППЭ	0
18		$b_{12} > -3/p$	С	С	У,У	ГППЭ	0
19	$2p^2-9q<0$	$b_{12} < p/(p^2-4q)$	С	С	У,У	ГППЭ	0
20		$b_{12} = p/(p^2-4q)$	С	–	У,У	ГППП	0
21		$\frac{p}{p^2-4q} < b_{12} < -\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}$	С	С	У,У	ГППЭ	0
22		$b_{12} = -1/\sqrt{p^2-4q}$	С	ГППЭ	–	ГППЭ	0
23		$-1/\sqrt{p^2-4q} < b_{12} < p/(p^2-3q)$	С	Ц	–	ГППЭ	0
24		$\frac{1}{p^2-3q} < b_{12} \le \frac{p}{p^2-2q}$	С	Ц	–	С	2
25		$p/(p^2-2q) < b_{12} < 1/p$	С	Ц	С,С	ГППЭ	2
26		$1/p < b_{12} < 1/\sqrt{p^2-4q}$	С	Ц	–	ГППЭ	0
27		$b_{12} = 1/\sqrt{p^2-4q}$	С	ГППЭ	–	ГППЭ	0
28		$b_{12} > 1/\sqrt{p^2-4q}$	С	С	У,У	ГППЭ	0

Обозначения: С – седло, У – узел, Ц – центр, Г – гиперболический сектор, П – параболический сектор, Э – эллиптический сектор.

Заметим, что если точки (10) – узлы, то они лежат на овале кривой (2), если же точки (10) – седла, то они лежат на бесконечных ветвях кривой (2). Точка (8) в случаях 1, 11, 19 лежат левее, а в остальных случаях правее оси Oy. Если точка (8) – центр, то она лежит внутри овала, если ГППЭ – то на овале кривой (2).

Литература

1. Савелов А.А. Плоские кривые. – М.: Изд. физ.-мат. лит., 1960. – 294 с.
2. Еругин Н.П. Построение всего множества дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ, 1952. – Т. 16. Вып. 6. – С. 650–670.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
4. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. – Мн.: Выш. шк., 1979. – 136 с.

Summary

Qualitative research of one cubic system of the second order having private integral as an algebraic curve of the third order is carried out.

Поступила в редакцию 24.09.04.