УДК 519.240

Н.В. Сергиевич

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ К КОМПОЗИЦИИ ПУАССОНОВСКОГО И НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Часто в приложениях в качестве моделей случайных процессов с зависимыми приращениями появляется композиция пуассоновского и нормального двумерных распределений (см, например, [1–4]).

Поэтому нахождение необходимого и достаточного условий сходимости распределений сумм зависимых случайных векторов к данной композиции представляет определенный интерес.

Данная работа посвящена решению этого вопроса.

Пусть $\{\eta_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, $\eta_{ns}=\left(\eta_{ns}^{(1)},\eta_{ns}^{(2)}\right)$ – система двумерных случайных векторов, определенных при каждом n на общем вероятностном пространстве. Центрируем векторы системы $\{\eta_{ns}\}$, положив $\xi_{ns}=\eta_{ns}-M\eta_{ns}$, $\xi_{ns}=\left(\xi_{ns}^{(1)},\xi_{ns}^{(2)}\right)$, $M\xi_{ns}=0$, и введем ковариационную матрицу $B_n=\left\|b_{n(i,j)}\right\|$, где $b_{n(i,j)}=\sum\limits_{0\le|s-p|\le m_n} M\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)};\left|\xi_{ns}\right|\le\varepsilon\Lambda\left|\xi_{np}\right|\le\varepsilon\right)$, $i,j=1,2$, $\varepsilon>0$, m_n определяется в теореме 2, $h(n)$ – медленно меняющаяся функция при $n\to\infty$ [5], $x,x_0,t\in R^2$ – точки на плоскости, $x=\left(x^{(1)},x^{(2)}\right)$, $x_0=\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)}\right)$, $t=\left(t^{(1)},t^{(2)}\right)$, $(t,\bullet)$ – скалярное произведение.

1°. Справедлива следующая

Теорема 1. *Двумерное распределение с логарифмом характеристической функции*

$$\psi(t) = \lambda\left(e^{i(t,x_0)} - 1\right) - \frac{\left(t, Bt^*\right)}{2},$$

где B *– симметричная неотрицательно определенная матрица – есть композиция распределения Пуассона вдоль прямой* $x = kx_0$, $k > 0$ *и нормального (вырожденного) распределения на плоскости с центром в начале координат и корреляционной матрицей* B.

Доказательство. Действительно, распределение Пуассона вдоль прямой $x = kx_0$, $k > 0$, когда точка x_0 – носитель пуассоновских вероятностей с весом λ, имеет вид

$$P\{\xi = mx_0\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = \overline{0,\infty}. \tag{1}$$

Найдем х.ф. распределения (1). Получаем

$$\varphi(t) = Me^{i(t,x_0)} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(t,mx_0)} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{i(t,x_0)}\right)^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda(i(t,x_0))} = e^{\lambda(i(t,x_0)-1)},$$

откуда $\psi(t) = \ln\varphi(t) = \lambda\left(i(t, x_0) - 1\right)$.

С другой стороны, $\exp\left(-\frac{\left(t, Bt^*\right)}{2}\right)$ – х.ф. нормального распределения с плотностью вероятности $p(x) = \frac{\sqrt{\left|B^{-1}\right|}}{2\pi} e^{-\frac{\left(x, B^{-1}x^*\right)}{2}}$. Теорема доказана.

2°. Введем спектральную функцию

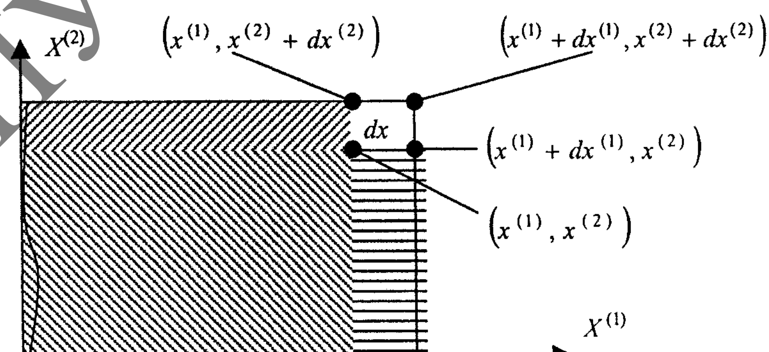
$$K_n(x) = \sum_{s=1}^{n} M\left(\xi_{ns}^2; \xi_{ns} \le x\right) = \int_{-\infty}^{x^{(1)}} \int_{-\infty}^{x^{(2)}} x^2 dP\{\xi_{ns} \le x\},$$

где $x = \left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)$ – точка на плоскости, $\xi_{ns} \le x$ означает, что $\xi_{ns}^{(i)} \le x^{(i)}$, $i = \overline{1,2}$.

Функция $K_n(x)$ порождает меру

$$\mu_n(dx) = K_n(x^{(1)} + dx^{(1)}, x^{(2)} + dx^{(2)}) - K_n(x^{(1)} + dx^{(1)}, x^{(2)}) -$$
$$- K_n(x^{(1)}, x^{(2)} + dx^{(2)}) + K_n(x^{(1)}, x^{(2)})$$

на борелевских множествах на плоскости (см. рис.):



Поэтому если B – борелевское множество на плоскости, то $K_n(x)$ порождает меру, определяемую на каждом таком множестве равенством

$$\mu_n(B) = \sum_{s=1}^{n} \int_B x^2 dP\{\xi_{ns} \le x\}, \tag{2}$$

где $B \in \mathcal{B}\left(R^2\right)$.

Поскольку ниже из области интегрирования исключен нуль, далее будем считать, что $\mu_n(0)=0$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$ $n=\overline{1,\infty}$, *– система серий* m_n *-зависимых двумерных векторов,* $m_n = m_0 n^{1/8-\rho}$, $0<\rho\le 1/8$. *Кроме того, найдутся такие* H_1, H_2 *и* n_0, *что при* $n \ge n_0$,

$$\max_{s,i} M\xi_{ns}^{(i)2} \le \frac{H_1 h(n)}{n}, \qquad \max_{s,r,q,i,j,k} M\left|\xi_{ns}^{(i)}\xi_{nr}^{(j)}\xi_{nq}^{(k)}\right| \le \frac{H_2 h(n)}{n^{3/2}},$$

где $0<|r-q|\le m_0 n^{1/4-\rho}$, $0<|s-q|\le m_0 n^{1/4-\rho}$.

Для того, чтобы суммы $S_n = \xi_{n1}+\ldots+\xi_{ns}$ *имели предельное распределение при* $n\to\infty$ *с плотностью вероятности*

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z, B^{-1}z^*\right)\right\}, \tag{3}$$

где $z = x+\lambda x_0 - m x_0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*
если δ_0 *–* τ *-окрестность точки* $O(0,0)$, δ_1 *–* τ *-окрестность точки* $x_0=\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)}\right)$, *то для любого* $\tau\in(0,|x_0|)$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n} P\{\xi_{ns}\in\delta_1\}=\lambda, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\int_{\overline{\delta_0\cup\delta_1}} x^2 dP\{\xi_{ns}\le x\}=0, \tag{5}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} B_n = B. \tag{6}$$

Доказательство. Д о с т а т о ч н о с т ь . В [6] показано, что если $K_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{сл.}K(x)$, $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ для m_n -зависимых векторов серий $\{\xi_{ns}\}$, то в условиях теоремы 2 суммы S_n будут иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х.ф. которого

$$\psi(t) = \int_{R^2}\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,x)\right)\frac{1}{|x|^2}dK(x) - \frac{(t,Bt^*)}{2}, \tag{7}$$

где из области интегрирования исключен нуль-вектор, t^* – вектор-столбец.

Условия (4) – (5) утверждают, что вероятность сосредоточивается в окрестностях точек (0,0) и x_0, а в остальных точках плоскости она равна 0. Кроме того, так как из области интегрирования в (7) исключен нуль-вектор, то остается приращение $K(x)$ только в точке x_0, которое из формулы (2) равно $\mu(x_0) = |x_0|^2 \lim_{\tau\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\int_{\delta_1} dP\{\xi_{ns}\le x_0\} = |x_0|^2\lambda$.

Отсюда с учетом условий (4) – (5) следует, что

$$\mu_n(B)\xrightarrow[n\to\infty]{слабо}\mu(B)=\begin{cases}|x_0|^2\lambda, & x=x_0,\\ 0, & x\ne x_0.\end{cases} \tag{8}$$

Поэтому получаем:

$$\psi(t) = \int_{R^2}\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,x)\right)\frac{1}{|x|^2}dK(x)-\frac{(t,Bt^*)}{2} = \left(e^{i(t,x_0)}-1-i(t,x_0)\right)\frac{1}{|x_0|^2}|x_0|^2\lambda - \frac{(t,Bt^*)}{2}.$$

Следовательно, суммы S_n будут иметь предельное распределение, логарифм х.ф. которого

$$\psi(t)=\lambda\left(e^{i(t,x_0)}-1-i(t,x_0)\right)-\frac{(t,Bt^*)}{2}=\lambda\left(e^{i(t,x_0)}-1\right)-i(t,x_0)\lambda-\frac{(t,Bt^*)}{2}. \qquad (9)$$

Отсюда х.ф. предельного распределения будет иметь вид:

$$\varphi(t)=e^{\psi(t)}=\exp\left[\lambda\left(e^{i(t,x_0)}-1\right)\right]\exp\left[-i(t,x_0)\lambda-\frac{(t,Bt^*)}{2}\right],$$

где в правой части равенства первый множитель

$$\varphi_P(t)=\exp\left[\lambda\left(e^{i(t,x_0)}-1\right)\right] \qquad (10)$$

есть характеристическая функция распределения Пуассона вдоль прямой $x=kx_0$, $k>0$ с параметром λ, а второй множитель

$$\varphi_N(t)=\exp\left[-i(t,x_0)\lambda-\frac{(t,Bt^*)}{2}\right] \qquad (11)$$

есть характеристическая функция двумерного нормального распределения.

Следовательно, предельным распределением сумм S_n будет композиция пуассоновского (10) и нормального (11) распределений с плотностью вероятности

$$p(x)=\frac{e^{-\lambda}\sqrt{\left|B^{-1}\right|}}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z,B^{-1}z^*\right)\right\}, \qquad (12)$$

где $z=x+\lambda x_0-mx_0$.

Необходимость. Если логарифм предельной х.ф. сумм S_n выражается по формуле (9), то, как показано в [7],

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}B_n=B \text{ и } K_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{сл.}}K(x)<\infty,$$

где $K(x)$ порождает на $R^2/0$ меру

$$\mu(x)=\begin{cases}\left|x_0\right|^2\lambda, & x=x_0,\\ 0, & x\neq x_0.\end{cases}$$

Следовательно, при любом $\tau>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}P\{\xi_{ns}\in\delta_1\}=\lambda,\ \lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\int_{\delta_0\cup\delta_1}x^2dP\{\xi_{ns}\le x\}=0,$$

т.е. точка x_0 – носитель пуассоновских вероятностей с весом λ. Теорема доказана.

Замечание. Если $\sum_{s=1}^{n}M\eta_{ns}\to l_0=\left(l_0^{(1)},l_0^{(2)}\right)$, то в условиях теоремы 2 суммы $l=\sum_{s=1}^{n}\eta_{ns}$ будут иметь предельные распределения, логарифм х.ф. которого

$$\psi(t)=\lambda\left(e^{i(t,x_0)}-1-i(t,x_0)\right)-\frac{(t,Bt^*)}{2}+i\left(t,l_0\right),$$

что следует из свойств х.ф.

Следовательно, в условиях теоремы 2, если $\sum_{s=1}^{n}M\eta_{ns}\to l_0$, то предельное распределение сумм S_n будет сверткой нормального, вырожденного распределений и распределения Пуассона, то есть будет иметь плотность вероятности

$$p(x)=\frac{e^{-\lambda}\sqrt{\left|B^{-1}\right|}}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z,B^{-1}z^*\right)\right\},$$

где $z=x-\left(l_0-\lambda x_0\right)-mx_0$, $x=\left(x^{(1)},x^{(2)}\right)$ – точка на плоскости.

Литература

1. Башмаков В.И., Чикова Т.С., Юдин М. Д. Распределение трещин по размерам в кристаллических телах // ДАН БССР. – 1983. – Т. 27, № 4. – С. 326–328.
2. Юдин М.Д., Сергиевич Н.В., Шилько С. В. Локализация дефектов в твердых телах. Часть 1. Вероятностная модель поверхностного разрушения кристаллов // Материалы, технологии, инструменты, 4. – 1999. – № 3. – С. 5–10.
3. Юдин М.Д., Сергиевич Н.В., Шилько С. В. Локализация дефектов в твердых телах. Часть 2. Учет разветвления трещин // Материалы, технологии, инструменты, 5. – 2000. – № 1. – С. 18-21.
4. Сергиевич Н.В., Шилько С.В., Юдин М. Д. Автолокализация дефектов в адаптивных композитах: вероятностная модель процесса // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2001. – Т. 6, № 4. - С. 504-509.
5. Ибрагимов И.А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. – М., 1965.
6. Юдин М. Д. Об обобщении формулы Колмогорова на суммы зависимых векторов // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 4. – С. 61–64.
7. Юдин М.Д. О необходимых условиях сходимости распределений сумм зависимых случайных векторов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 1. – С. 34–37.

Summary

The general results on necessary and sufficient condition of convergence of distributions of the sums of dependent random vectors are used to the sums of dependent two-dimensional vectors.

Поступила в редакцию 28.09.04.