УДК 519.240

М.Д. Юдин

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СУММ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Случайные векторы называются обычно слабо зависимыми между собой, если для них выполняются или условие сильного перемешивания, или условие равномерно сильного перемешивания (р.с.п.) [1].

В данной работе используется условие р.с.п. с достаточно быстро убывающим коэффициентом. Даются достаточные условия сходимости распределений сумм зависимых случайных векторов к безгранично делимым распределениям, логарифм характеристических функций (х.ф.) которых представлен по формулам, обобщающим известные формулы Колмогорова и Леви-Хинчина [1].

Случай m_n-зависимости, которая называется обычно сильной, рассмотрен нами в [2; 3].

1^0. Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, – система серий d-мерных случайных векторов, определенных при каждом n на общем вероятностном пространстве, $\xi_{ns}=\left(\xi_{ns}^{(1)},\dots,\xi_{ns}^{(d)}\right)$, $x=(x_1,\dots,x_d)$, $t=(t_1,\dots,t_d)$ $(\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение, $S_n=\sum\limits_{s=1}^{n}\xi_{ns}$, математическое ожидание (м.о.) $E\xi_{ns}=0$, $s=\overline{1,n}$, $x^2=(x\,,x)=|x|^2$.

Обозначение $\xi_{ns}\le x$ означает $\xi_{ns}^{(i)}\le x_i$, $i=\overline{1,d}$ [4].

Введем симметричную матрицу $\mathbf{B}_n=\left\|b_{n(i,j)}\right\|$, $i,j=\overline{1,d}$, где $b_{n(i,j)}=\sum\limits_{0\le|s-p|\le k_n}E\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)};\left|\xi_{ns}^{(i)}\right|\le\varepsilon\wedge\left|\xi_{np}^{(j)}\right|\le\varepsilon\right)$, $\varepsilon>0$, k_n определяется в теореме 1.

Через $h(n)$ обозначим медленно меняющую функцию при $n\to\infty$ [1].

В [4] нами доказана

Теорема 1. *Пусть система серий* $\{\xi_{ns}\}$ *случайных векторов удовлетворяет условию р. с. п., коэффициент которого* $\beta(\tau)=o\left(\tau^{-3-\delta}\right)$, $\delta>0$, *существуют постоянные* H_1 , H_2 *и* n_0 *такие, что при* $n\ge n_0$

$$\max_{s,i}E\xi_{ns}^{(i)}\le\frac{H_1}{n},\qquad \max_{\substack{s,p,q\\ i,j,k}}E\left|\xi_{ns}^{(i)}\xi_{nr}^{(j)}\xi_{nq}^{(k)}\right|\le\frac{H_2h(n)}{n^{3/2}},$$

где $0\le|r-q|\le k_n=\left[n^{1/4-\rho/2}\right]$, $0<|s-q|\le k_n$, $0<\rho\le\dfrac{\delta}{2(7+2\delta)}$. *Тогда если при* $n\to\infty$

$$K_n(x)=\sum_{s=1}^{n}E\left(\xi_{ns}^2;\xi_{ns}\le x\right)\xrightarrow{\text{сл.}}K(x)<\infty,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\mathbf{B}_n=\mathbf{B},$$

где $\mathbf{B}$ *– матрица с конечными элементами, то суммы* S_n *будут иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х. ф. которого*

$$\psi_n(t)=\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,x)\right)\frac{1}{x^2}dK_n(x)-\frac{\left(t,\mathbf{B}t^*\right)}{2},\qquad(1)$$

где t^* *– вектор-столбец, а из области интегрирования исключен нуль-вектор.*

Теорема 1 относится к случаю, когда вектора ξ_{ns} имеют ограниченные дисперсии. Формула (1) обобщает формулу Колмогорова [1] на суммы d-мерных зависимых случайных векторов.

2^0. Рассмотрим случай неограниченных дисперсий. Пусть $\{X_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$ – система серий *d*-мерных случайных векторов, определенных при каждом *n* на общем вероятностном пространстве. Существование м.о. векторов X_{ns} не предполагается.

Положим: $X_{ns}=\left(X_{ns}^{(1)},\ldots,X_{ns}^{(d)}\right)$,

$$\overline{X}_{ns}^{(i)}=\begin{cases}X_{ns}^{(i)}, & \left|X_{ns}^{(i)}\right|\le H,\\ 0\;, & \left|X_{ns}^{(i)}\right|>H,\end{cases}\qquad \overline{\overline{X}}_{ns}^{(i)}=\begin{cases}0\;, & \left|X_{ns}^{(i)}\right|<H,\\ X_{ns}^{(i)}, & \left|X_{ns}^{(i)}\right|\ge H,\end{cases}\tag{2}$$

где $H\ \ge\ H_0\ >\ 0$, H_0 – фиксированное число, $a_{ns}^{(i)}=E\left(X_{ns}^{(i)};\ \left|X_{ns}^{(i)}\right|\le H_0\right)$, $\xi_{ns}^{(i)}=X_{ns}^{(i)}-a_{ns}^{(i)}$, $\xi_{ns}=\left(\xi_{ns}^{(1)},\ldots,\xi_{ns}^{(d)}\right)$, $\overline{\xi}_{ns}^{(i)}=\overline{X}_{ns}^{(i)}-a_{ns}^{(i)}$, $\overline{\overline{\xi}}_{ns}^{(i)}=\overline{\overline{X}}_{ns}^{(i)}$, $\overline{\xi}_{ns}=\left(\overline{\xi}_{ns}^{(1)},\ldots,\overline{\xi}_{ns}^{(d)}\right)$, $\overline{\overline{\xi}}_{ns}=\left(\overline{\overline{\xi}}_{ns}^{(1)},\ldots,\overline{\overline{\xi}}_{ns}^{(d)}\right)$,

$$S_n=\sum_{s=1}^{n}\xi_{ns}\ ,\ \overline{S}_n=\sum_{s=1}^{n}\overline{\xi}_{ns}\ ,\ \overline{\overline{S}}_n=\sum_{s=1}^{n}\overline{\overline{\xi}}_{ns}\ ,$$

$$\overline{\Psi}_n(x)=\sum_{s=1}^{n}E\left(\frac{\overline{\xi}_{ns}^{\,2}}{1+\overline{\xi}_{ns}^{\,2}};\quad \xi_{ns}\le x\right).$$

Через $\overline{E}$ будем обозначать м. о., взятое от функций векторов $\overline{\xi}_{ns}$, через $\overline{\overline{E}}$ – м. о., взятое по дополнению к множеству, по которому взято $\overline{E}$.

При $H=H_0$ в (1) $\overline{\xi}_{ns}^{(i)}$, $\overline{\xi}_{ns}$, $\overline{E}$ будем обозначать через $\tilde{\xi}_{ns}^{(i)}$, $\tilde{\xi}_{ns}$, $\tilde{E}$ соответственно.

Теорема 2. *Пусть система серий векторов* $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$ *удовлетворяет условию р. с. п., коэффициент которого* $\beta(\tau)=o\left(\tau^{-3-\delta}\right)$, $\delta>0$, *кроме того, найдутся постоянные* $H_0>0$ *и* n_0 *такие, что при* $H\ \ge\ H_0$ *и* $n\ \ge\ n_0$

$$\max_{s}P\left\{\left|\overline{\overline{\xi}}_{ns}\right|>0\right\}\le\frac{g(H)}{n},\tag{3}$$

$$\max_{s,i}E\overline{\xi}_{ns}^{(i)^2}\le\frac{H_1}{n},\tag{4}$$

$$\max_{\substack{s,p,q\\ i,j,k}}E\left|\overline{\xi}_{ns}^{(i)}\overline{\xi}_{np}^{(j)}\xi_{nq}^{(k)}\right|\le\frac{H_2h(n)}{n^{3/2}},\tag{5}$$

где $0\ <|p-s|\le k_n=\left[n^{1/4-\rho/2}\right]$, $0\le|p-q|\le k_n$, $0<\rho\le\dfrac{\delta}{2(7+2\delta)}$, $g(H)\to 0$ *при* $H\to\infty$, H_1, H_2 *– постоянные, могущие зависеть от H. Тогда если* $\lim\limits_{H\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\Psi}(x)=\Psi(x)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{B}_n=\mathbf{B}$,

$\lim\limits_{H\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}=\sum\limits_{s=1}^{n}E\dfrac{\overline{\xi}_{ns}}{1+\overline{\xi}_{ns}^{\,2}}=A$, *то суммы* S_n *будут иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х. ф. которого*

$$\psi_n(t)=\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi(x)+i(t,A)-\frac{\left(t,\mathbf{B}t^*\right)}{2},\tag{6}$$

где t^* *– вектор-столбец, а из области интегрирования исключен нуль-вектор.*

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о</u>. 1. Сделаем разбиение суммы S_n по методу Бернштейна:

$$u_{ni}=\sum_{s=(i-1)k+(i-1)m+1}^{ik+(i-1)m}\xi_{ns}\ ,\qquad \upsilon_{ni}=\sum_{s=ik+(i-1)m+1}^{ik+im}\xi_{ns}\ ,\ i=\overline{1,\nu},\tag{7}$$

(можно считать, что n кратно $k+m$, $n=\nu(k+m)$ (см. [2, 45]), $S_{n1}=\sum_{i=1}^{\nu}u_{ni}$, $S_{n2}=\sum_{i=1}^{\nu}\upsilon_{ni}$, $S_n = S_{n1} + S_{n2}$.

Возьмем в разбиении (7) $k=k_n=\left[n^{1/4-\rho/2}\right]$, $m=m_n=\left[n^{1/4-\rho}\right]$, $0<\rho\le\dfrac{\delta}{2(7+2\delta)}$.

При $H = H_0$ в (1) из включения

$$\left\{\left|S_{n2}\right|>\varepsilon\right\}\subset\left\{\left|\tilde{S}_{n2}\right|>\varepsilon\right\}\cup\left\{\left|\bar{\bar{S}}_{n2}\right|>0\right\}$$

следует, что

$$P\left\{\left|S_{n2}\right|>\varepsilon\right\}\le P\left\{\left|\tilde{S}_{n2}\right|>\varepsilon\right\}+P\left\{\left|\bar{\bar{S}}_{n2}\right|>0\right\}.$$

Пользуясь (3), найдем

$$P\left\{\left|\bar{\bar{S}}_{n2}\right|>0\right\}\le\sum_{s=1}^{\nu m}P\left\{\left|\bar{\bar{\xi}}'_{ns}\right|>0\right\}\le\frac{g(H_0)\nu m}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

где ξ'_{ns} – вектора, вошедшие при разбиении (7) в S_{n2}. Кроме того,

$$P\left\{\left|\tilde{S}_{n2}\right|>\varepsilon\right\}\le\frac{E\tilde{S}_{n2}^2}{\varepsilon^2}.$$

Здесь так же, как это сделано в [5] при доказательстве леммы 3.4 (стр. 126), нетрудно убедиться, что из условия (4) и р. с. п. следует, что $E\tilde{S}_{n2}^2\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, $S_{n2}\xrightarrow[n\to\infty]{P}0$. Поэтому предельное распределение суммы S_n совпадает с предельным распределением суммы S_{n1} (см. лемму 1.4 в [6, 44]).

2. Вектора, вошедшие при разбиении (7) в S_{n1}, выпишем в порядке возрастания их индексов. Получим систему серий

$$\eta_{n1},\eta_{n2},\ldots,\eta_{n\ell},\quad \ell=\nu k,\quad n=\overline{1,\infty}. \tag{8}$$

Введем обозначения для системы (8): $S_{n(j,p)}=\eta_{n(j+1)}+\cdots+\eta_{np}$, $S_{n(p,p)}\equiv 0(mod\ P)$, B_{nj} – σ-алгебра, порожденная вектором η_{nj},

$$f_{nj}\left(t/B_{nj}\right)=\frac{E\left(\exp i\left(t,S_{n(j,\ell)}\right)/B_{nj}\right)}{E\left(\exp i\left(t,S_{n(j,\ell)}\right)\right)},$$

$$\varphi_{nj}(t)=E\left(e^{it\eta_{nj}}f_{nj}\left(t/B_{nj}\right)\right).$$

Очевидно, х. ф. суммы S_{n1}

$$\varphi_n(t)=\prod_{j=1}^{\ell}\varphi_{nj}(t).$$

Пусть $p=p(j)$ – индекс последнего вектора η_{np} той части u_{ni}, в которую вошел вектор η_{nj}. Применяя неравенство (1.16) из [6, 39] найдем

$$\left|E\exp i\left(t,S_{n(j,\ell)}/B_{nj}\right)-E\exp i\left(t,S_{n(j,p)}/B_{nj}\right)E\exp i\left(t,S_{n(p,\ell)}\right)\right|\le 4\beta(m). \tag{9}$$

Пусть $S_{n(p,\ell)}=u_{n(q+1)}+\cdots+u_{n\nu}$, $\varphi_{u_{ni}}(t)$–х.ф. векторов u_{ni}, $i=\overline{1,\nu}$. Из неравенства (1.15) в [6, 38] следует, что

$$\left|E\exp i\left(t,S_{n(p,\ell)}\right)-\varphi_{u_{n(q+1)}}\cdot\ldots\cdot\varphi_{u_{n\nu}}\right|\le 16(\nu-q)\beta(m). \qquad (10)$$

Так как согласно неравенству (1.17) из [6, 40], а также (3),

$$\widetilde{E}u_{ni}^2\le\frac{H_1kd}{n}+\frac{4H_1d}{n}\sum_{\tau=1}^{k-1}(k-\tau)\beta^{1/2}(\tau)\le\frac{H_3kd}{n}, \qquad (11)$$

где H_3 – некоторая постоянная, из (11) и (3) получим

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{u_{ni}}-1\right|&\le\left|\widetilde{E}(\exp i(t,u_{ni})-1)\right|+\left|\overline{\overline{E}}(\exp i(t,u_{ni})-1)\right|\le\\&\le\frac{t^2H_3kd}{2n}+\frac{2g(H_0)k}{n}.\end{aligned} \qquad (12)$$

Отсюда и (10) находим

$$\begin{aligned}&\left|E\exp i\left(t,S_{n(p,l)}\right)\right|\ge\\ &\ge\prod_{i=q+1}^{\nu}\left|\varphi_{u_{ni}}\right|-16(\nu-q)\beta(m)\ge\left(1-\frac{t^2H_3kd}{2n}-\frac{2g(H_0)k}{n}\right)^{\nu}-16\nu\beta(m)\ge\\ &\ge\exp\left(-\frac{t^2H_3d+4g(H_0)}{2}\right)-16\nu\beta(m).\end{aligned}$$

Так как $\nu\beta(m)\to 0$ при $n\to\infty$, когда $\beta(m)=o\left(m^{-3-\delta}\right)$, $\delta>0$ и $0<\rho\le\dfrac{\delta}{2(7+2\delta)}$, то из (12) и (9) следует, что функции $f_{nj}\left(t/B_{nj}\right)$ представимы в виде:

$$f_{nj}\left(t/B_{nj}\right)=\frac{E\left(\exp i\left(t,S_{n(j,p)}\right)\ /B_{nj}\right)+\chi_{nj}(t)\beta_{j1}(m)}{E\exp i\left(t,S_{n(j,p)}\right)+\chi_{nj}(t)\beta_{j2}(m)}, \qquad (13)$$

где $\left|\beta_{j1}\right|\le 4\beta(m)$, $\left|\beta_{j1}\right|\le 4\beta(m)$ и при любом фиксированном t функции $\chi_{ns}(t)$ равноограничены, если $n\ge n_0$.

3. Благодаря (12),

$$\left|E\exp i\left(t,S_{n(j,p)}\right)\right|\ge 1-\frac{H_3kt^2d}{2n}-\frac{2g(H_0)k}{n}=Q_n \qquad (14)$$

где $Q_n\to 1$ при $n\to\infty$. Отсюда и (13) находим, так же, как это сделано в [7], что система серий (8) удовлетворяет условию (A) [6;7]: при любом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\ell}\left|\varphi_{nj}(t)-1\right|^2=0. \qquad (A)$$

После этого совершенно так же, как доказывается лемма 1.3 в [5, 43], мы приходим к выводу, что для сходимости распределений сумм S_{nl} к распределению с х. ф. $\varphi(t)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\ell}\left(\varphi_{nj}(t)-1\right)=\ln\varphi(t).$$

4. Пусть для системы (8)

$$A_{nj}(t)=E\left(\frac{\eta_{nj}}{1+\eta_{nj}^2}f_{nj}\left(t,B_{nj}\right)\right),\qquad A_{\ell}(t)=\sum_{j=1}^{\ell}A_{nj}(t).$$

Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{\ell}\left(\varphi_{nj}(t)-1\right)=\sum_{j=1}^{\ell}\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)f_{nj}\left(t/B_{nj}\right)dP\{\eta_{nj}\le x\}+i\left(t,A_{\ell}(t)\right). \tag{15}$$

Используя разложение

$$e^{i(t,x)}=1+i(t,x)-\frac{(t,x)^2}{1+x^2}\theta,\quad |\theta|\le 1, \tag{16}$$

найдем $\left|e^{i(t,x)}-1-\dfrac{i(t,x)}{1+x^2}\right|\le (t,x)^2$. Отсюда, (3), (4), (5), (13) и (14) следует

$$\left|\sum_{j=1}^{\ell}\int_{|x|\le H}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\left(f_{nj}\left(t/B_{nj}\right)-1\right)dP\{\eta_{nj}\le x\}\right|\le$$

$$\frac{|t|^2}{Q_n}\left(\frac{\left(H_2h(n)+H_1^{3/2}\right)|t|\,\nu k^2d^2}{n^{3/2}}+\right.$$

$$\left.+8\max_j|\chi_{nj}|\frac{H_1\nu k}{n}\beta(m)\right)+\frac{2}{Q_n}g(H)\left(2+|t|\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}2\left(2+|t|\right)g(H).$$

Также $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{\ell}\int_{|x|>H}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\left(f_{nj}\left(t/B_{nj}\right)-1\right)dP\{\eta_{nj}\le x\}\right|\le\dfrac{2}{Q_n}\left(2+|t|\right)g(H)$.

Следовательно, при $n\to\infty$, а затем $H\to\infty$, предел первой суммы правой части равенства (15) совпадает с

$$\lim_{H\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\int_{|x|\le H}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)dP\{\xi_{ns}\le x\}, \tag{17}$$

поскольку для величин ξ'_{ni}, вошедших в S_{n2}, предел этой суммы равен нулю.

Пусть матрица $\mathbf{C}_n=\left\|c_{n(i,j)}\right\|$, где $c_{n(i,j)}=\sum\limits_{s=1}^{n}E\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{ns}^{(j)};\left|\xi_{ns}^{(i)}\right|\le\varepsilon,\left|\xi_{ns}^{(j)}\right|\le\varepsilon,\right)$ и $\mathbf{C}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{C}_n$. Используя разложение

$$e^{i(t,x)}=1+i(t,x)-\frac{(t,x)^2}{2}+i\frac{(t,x)^3}{6}\theta,\quad |\theta|\le 1$$

и равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}E\left(-\frac{(t,\xi_{ns})^2}{2};\left|\xi_{ns}^{(i)}\right|\le\varepsilon,\ i=\overline{1,d}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\left(t,\mathbf{C}_nt^*\right)}{2}\right),$$

из свойств интеграла Стильтеса найдем, что предел (17) будет равен

$$\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi(x)-\frac{\left(t,\mathbf{C}t^*\right)}{2}, \tag{18}$$

где из области интегрирования исключен нуль-вектор.

5. Пусть $\overline{A}_{\ell}(t)=\sum\limits_{j=1}^{\ell}E\left(\dfrac{\overline{\eta}_{nj}}{1+\overline{\eta}_{nj}^2}f_{nj}\left(t/B_{nj}\right)\right)$, $\quad X_{n(j,p)}=E\exp i(t,S_{n(j,p)})$. Исходя из (13) и разложения

$$e^{i(t,S_{n(j,p)})}=1+i(t,S_{n(j,p)})-\frac{(t,S_{n(j,p)})^2}{2}\theta_{nj}, \quad |\theta_{nj}|\le 1,$$

исследуем сумму

$$\sum_{j=1}^{\ell}\overline{E}\left(\frac{\eta_{nj}\left(1+i(t,S_{n(j,p)})-\frac{1}{2}(t,S_{n(j,p)})^2\theta_{nj}+\chi_{nj}(t)\beta_{j1}(m)\right)}{(1+\eta_{nj}^2)(X_{n(j,p)}+\chi_{nj}(t)\beta_{j2}(m))}\right).$$

В силу центрированности вектора $\widetilde{\eta}_{nj}$ из (3) и (4) найдем, что

$$\left|\overline{E}\frac{\eta_{nj}}{1+\eta_{nj}^2}\right|\le\left|\widetilde{E}\left(\frac{\eta_{nj}}{1+\eta_{nj}^2}-\eta_{nj}\right)\right|+\frac{g(H_0)}{n}\le\frac{H_1 d}{n}+\frac{g(H_0)}{n}.$$

Отсюда, (9), (3) и р.с.п. получаем при $n\to\infty$

$$\sum_{j=1}^{\ell}\left|\overline{E}\frac{\eta_{nj}}{1+\eta_{nj}^2}\right|\left|X_{n(j,p)}+\chi_{nj}(t)\beta_{j2}(m)-1\right|\to 0,$$

$$\sum_{j=1}^{\ell}\left|\overline{E}\eta_{nj}(t,S_{n(j,p)})\right|\left|X_{n(j,p)}+\chi_{nj}(t)\beta_{j2}(m)-1\right|\to 0. \tag{19}$$

Нетрудно также видеть, что из (4), (3) и (5) следует при $n\to\infty$:

$$\sum_{j=1}^{\ell}\overline{E}\left|\eta_{nj}(t,S_{n(j,p)})^2\right|\to 0, \quad \sum_{j=1}^{\ell}\left|\overline{E}\frac{\eta_{nj}(t,S_{n(j,p)})}{1+\eta_{nj}^2}-\eta_{nj}(t,S_{n(j,p)})\right|\to 0,$$

$$\sum_{j=1}^{\ell}E\left|\frac{\overline{\eta}_{nj}}{1+\overline{\eta}_{nj}^2}\beta_{j1}(m)\right|\le\frac{H_1^{1/2}\nu k}{n^{1/2}(n^{1/4-\rho})^{3+\delta}}\to 0 \quad \text{при} \quad 0<\rho\le\frac{1+\delta}{4(3+\delta)} \quad \text{и} \quad n\ge n_0', \quad \text{и при}$$

любом $\varepsilon>0$

$$\sum_{j=1}^{\ell}\overline{E}\left|\eta_{nj}(t,S_{n(j,p)});|\eta_{nj}|>\varepsilon\right|\le\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{\ell}\overline{E}\left|\eta_{nj}^2(t,S_{n(j,p)})\right|\to 0. \tag{20}$$

Кроме того, из (3), (4) и р.с.п. для векторов ξ_{ni}', вошедших в S_{n2} при разбиении (7), легко найдем, что при $n\to\infty$

$$\sum_{i=1}^{\nu_m}\left|\overline{E}\frac{\xi_{ni}'}{1+\xi_{ni}'^2}\right|\le\frac{H_1\nu md}{n}+\frac{g(H_0)\nu m}{n}\to 0,$$

$$\sum_{i\ne j}\widetilde{E}(\upsilon_{ni}(t,\upsilon_{nj}))\to 0,$$

$$\sum_{j=1}^{\ell}\left|E\left(\frac{\eta_{nj}}{1+\eta_{nj}^2}\overline{\overline{E}}\left(e^{i(t,S_{n(j,p)})}/B_{nj}\right)\right)\right|\longrightarrow 0.$$

Из этих оценок, (19) и (20) следует, что

$$\lim_{H\to\infty}\lim_{n\to\infty}(t,A_\ell(t))=(t,A\ )+i\frac{(t,\mathbf{R}t^*)}{2}, \tag{21}$$

где $\mathbf{R}$ – предел при $n\to\infty$, а затем $\varepsilon\to 0$, матрицы $\mathbf{R}_n=\|r_{n(i,j)}\|$, в которой

$$r_{n(i,j)}=\sum_{0<|s-p|\le k_n}E\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)};|\xi_{ns}^{(i)}|\le\varepsilon,|\xi_{np}^{(j)}|\le\varepsilon\right).$$

Суммируя матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}$, из (15), (18) и (21) получим, что х.ф. $\varphi_n(t)$ сумм S_{nl} сходится при $n\to\infty$ к $e^{\psi(t)}$, где $\psi(t)$ выражается по формуле (6). Теорема доказана.

Литература

1. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины.– М.: Наука, 1965. – 524 с.

2. Юдин М.Д. Об обобщении формулы Колмогорова на суммы зависимых векторов // Изв. вузов. Математика. – 1999, № 4. – С. 61–64.

3. Юдин М.Д. Об обобщении формулы Леви-Хинчина на суммы зависимых векторов // Изв. вузов. Математика. – 1996, № 4. – С. 75–80.

4. Yudin M.D. About limiting distributions of the sums of intermixing random vectors with restricted variances // Buletinul Academiei de stiinte a Republicii Moldova. – 2002, № 1 (38). – P. 104–110.

5. Юдин М. Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. – Минск: Университетское, 1990. – 254 с.

Summary

The central limiting problem of probability theory for the sums of random vectors which meeting condition uniformly strong intermixing with are decided is residual by fast decreasing factors.

The canonical representation of a log of characteristic function of limiting distribution of the sums of dependent random vectors is obtained.

Поступила в редакцию 25.11.03.