УДК 517.917

В.В. Шкут

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

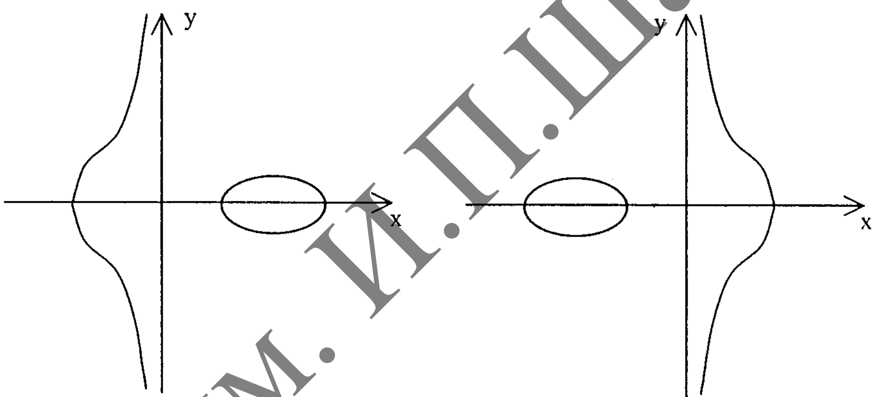
Пусть для системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=2}^{3} a_{ij} x^i y^j, \quad \frac{dy}{dt} = y + \sum_{i+j=2}^{3} b_{ij} x^i y^j, \tag{1}$$

где a_{ij}, $b_{ij} \in R$, алгебраическая кривая (см. [1, 47])

$$\omega(x, y) \equiv x^3 + xy^2 + px + q = 0,27q^2 + 4p^3 < 0 \tag{2}$$

является частным интегралом. Кривая (2) состоит из овала и гиперболической ветви и имеет вид:



$q > 0$ $\qquad\qquad$ $q < 0$

Лемма. Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2b_{02}xy - \frac{2p}{q}b_{02}x^2y - \frac{2}{p}xy^2 \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= y + 3b_{02}x^2 + b_{02}y^2 + \frac{2p}{q}b_{02}x^3 + \frac{3}{p}x^2y + \frac{1}{p}y^3 \equiv Q(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

МГПУ им. И.П.Шамякина

Для доказательства этой леммы следует воспользоваться равенством [2]: если кривая $\omega(x,y)=0$ – частный интеграл системы

$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)$, где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – многочлены степени n по x и y, то

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}P(x,y)+\frac{\partial\omega}{\partial y}Q(x,y)=\omega(x,y)\cdot F(x,y). \qquad (4)$$

Здесь $F(x,y)$ – многочлен по x и y степени $n-1$.

В нашем случае равенство (4) имеет вид:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}P(x,y)+\frac{\partial\omega}{\partial y}Q(x,y)=-\frac{2p}{q}b_{02}xy\cdot\omega(x,y). \qquad (5)$$

Замечание. Если $b_{02}=0$, то $y=0$ – особая линия для системы (3). Считаем далее, что $b_{02}\neq 0$. Нетрудно также видеть, что $x=0$ – частный интеграл для системы (3).

Из равенства (5) следует, что в конечной части плоскости возможные особые точки системы (3) лежат на линиях $x=0,\ y=0$ и $\omega(x,y)=0$. В дальнейшем качественное исследование системы (3) проведем при условии, что на овале кривой (2) нет особых точек системы (3).

Итак, приравнивая правые части системы (3) к нулю, получим систему для определения особых точек системы (3) в конечной части плоскости:

$$\left.\begin{aligned}&xy\left(p^2b_{02}x+qy+pqb_{02}\right)=0,\\&2p^2b_{02}x^3+3qx^2y+qy^3+3pqb_{02}x^2+pqb_{02}y^2+pqy=0.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Пусть $x=0$ или $y=0$. Тогда получим особые точки системы (3), лежащие на линиях $x=0$ и $y=0$:

$$x_1=0,\ y_1=0; \qquad (7)$$

$$x_{2,3}=0,\ y_{2,3}=\frac{-pb_{02}\pm\sqrt{p^2b_{02}^2-4p}}{2}; \qquad (8)$$

$$x_4=-\frac{3q}{2p},\ y_4=0. \qquad (9)$$

Пусть $xy\neq 0$. Тогда система (6) преобразуется к виду:

$$\left.\begin{aligned}&p^2b_{02}x+qy+pqb_{02}=0,\\&\omega(x,y)\equiv x^3+xy^2+qy^3+px+q=0.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Первое уравнение системы (10) есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=-\frac{p^2b_{02}}{q}\neq 0$. Отсюда следует, что данная прямая обязательно пересекает гиперболическую ветвь кривой (2). Это значит, что на гиперболической ветви кривой (2) лежит особая точка системы (3). Найдем условия, чтобы эта точка была единственной, лежащей на кривой (2). Тогда на овале кривой (2) не будут лежать особые точки системы (3). Для этого из системы (10) исключим, например, переменную y. Получим уравнение

$$x^3+ax^2+bx+c=0, \qquad (11)$$

где $a=\frac{2p^3qb_{02}^2}{p^4b_{02}^2+q^2}$, $b=\frac{pq^2+p^2q^2b_{02}^2}{p^4b_{02}^2+q^2}$, $c=\frac{q^3}{p^4b_{02}^2+q^2}$.

Если $4\left(3b-a^2\right)^3+\left(2a^3-9ab+27c\right)^2>0$, то [3], уравнение (11), а следовательно, система (10) имеет единственное решение. Это значит, что на овале кривой (2) нет особых точек системы (3). Особая точка, лежащая на гиперболической ветви кривой (2), имеет координаты

$$x_5\ ,\ y_5=-\frac{\left(p^2x_5+pq\right)b_{02}}{q}, \qquad (12)$$

где координата x_5 является единственным решением уравнения (11).

Выясним характер особых точек (7) – (9), (12). Для этого находим характеристические числа указанных особых точек. Они, соответственно, такие:

МГПУ им. И.П.Шамякина

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1; \tag{7'}$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{p}\left(y_{2,3}^2 - p\right); \tag{8'}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{8p^3}\left(4p^3 + 27q^2 \pm \sqrt{\left(4p^3 + 27q^2\right)^2 - 432p^4q^2b_{02}^2}\right); \tag{9'}$$

$$\lambda_1 = -\frac{2p}{q}b_{02}x_5y_5,\ \ \lambda_2 = 1 + 2b_{02}y_5 + \frac{3}{p}x_5^2 + \frac{3}{p}y_5^2. \tag{12'}$$

Так как по условию $27q^2 + 4p^3 < 0$, то $p < 0$. Тогда в (8') $\lambda_2 < 0$. Это значит, что особые точки (8) являются четырехсепаратрисными седлами. Также по числам (9') определяем, что точка (9) является фокусом или узлом. Легко проверить, что точка (9) лежит внутри овала кривой (2). Отсюда следует, что овал кривой является предельным циклом.

Выясним характер сложной особой точки (7). Система (3) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x,y),\ \ \frac{dy}{dt} = y + \eta(x,y). \tag{13'}$$

В нашем случае $\xi(x,0) \equiv 0$. Согласно [4, стр. 108], система (13) приводится к системе

$$\frac{dx}{dt} = \xi_1(x,y),\ \ \frac{dy}{dt} = y + \eta_1(x,y). \tag{14}$$

где $\xi_1(x,0) \equiv \xi(x,\varphi(x)) \not\equiv 0$ и $\eta_1(x,0) \equiv \varphi'(x)\cdot\xi_1(x,0)$.

Здесь функция $y = \varphi(x) = \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \ldots$ является решением уравнения $y + \eta(x,y) = 0$. Получаем $\varphi(x) = -3b_{02}x^2 + \ldots$.

Тогда $\xi_1(x,0) = 6b_{02}^2x^3 + \ldots \equiv ax^\alpha + \ldots,$

$$\eta_1(x,0) = 36b_{02}^3x^4 + \ldots \equiv bx^\beta + \ldots$$

Так как $a = 6b_{02}^2 > 0,\ \alpha = 3$ – нечетное и $\beta > \alpha$, то [4] точка (7) – узел.

Прежде чем выяснить характер особой точки (12), найдем и выясним характер особых точек системы (3) в бесконечной части плоскости. Для этого к системе (3) применяем преобразование Пуанкаре [5]:

$$x = \frac{1}{z},\ y = \frac{u}{z} \text{ и } x = \frac{v}{z},\ \ y = \frac{1}{z},\ \ \frac{dt}{z^2} \to dt.$$

Получим системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{2p}{q}b_{02} + \frac{3}{p}u + 3b_{02}z + \frac{2p}{q}b_{02}u^2 + \frac{3}{p}u^3 + 3b_{02}u^2z + uz^2,\\ \frac{dz}{dt} &= \frac{2p}{q}b_{02}uz + \frac{2}{p}u^2z + 2b_{02}uz^2, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{3}{p}v - \frac{2p}{q}b_{02}v^2 - 3b_{02}vz - \frac{3}{p}v^3 - vz^2 - \frac{2p}{q}b_{02}v^4 - 3b_{02}v^3z,\\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{1}{p}z - b_{02}z^2 - \frac{3}{p}v^2z - z^3 - \frac{2p}{q}b_{02}v^3z - 3b_{02}v^2z^2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Полагая в правых частях системы (15) $z = 0$ и приравнивая их к нулю, получим уравнение для определения координаты u особых точек $(u;0)$:

$$3qu + 2p^2b_{02} = 0.$$

Отсюда $u = -\dfrac{2p^2b_{02}}{3q}$. Это значит, что система (3) в бесконечной части плоскости имеет особую точку $\left(-\dfrac{2p^2b_{02}}{3q};0\right)$. Характеристические числа для нее:

МГПУ им. И.П.Шамякина

$$\lambda_1 = \frac{3}{p} + \frac{4p^3}{3q^2} b_{02}^2 < 0, \ \lambda_2 = -\frac{4p^3}{9q^2} b_{02}^2 > 0.$$

Отсюда следует, что точка $\left(-\frac{2p^2 b_{02}}{3q};0\right)$ – четырехсепаратрисное седло.

Подставляя в правые части системы (16) $v = z = 0$, видим, что «концы» оси Oy являются особой точкой для системы (3). Характеристические числа для нее такие:

$$\lambda_1 = -\frac{3}{p} > 0, \ \lambda_2 = -\frac{1}{p} > 0.$$

Следовательно, «концы» оси Oy – узел.

Выясним теперь характер особой точки (12). По сумме индексов исследованных особых точек получаем, что особая точка (12) должна иметь индекс +1. В (12') число $\lambda_1 \neq 0$ и действительно. Отсюда следует, что если $\lambda_2 \neq 0$ или $\lambda_2 = 0$, то точка (12) обязана быть узлом.

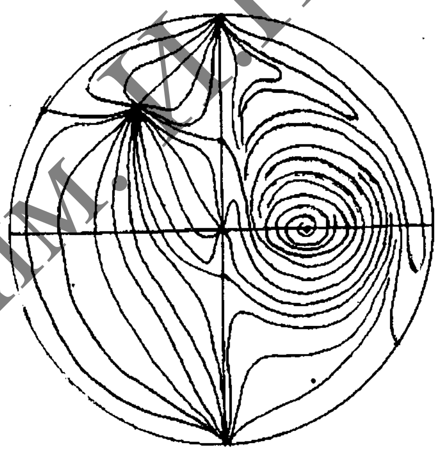
Из вышеизложенного следует.

Теорема. Система (3) в конечной части плоскости имеет:

1) узлы (7), (9) и (12);
2) четырехсепаратрисные седла (8);
3) предельный цикл – овал кривой (2).

В бесконечной части плоскости система (3) имеет узел – «концы» оси Oy и четырехсепаратрисное седло.

Пример. Полученные результаты для системы (3) реализуются, например, при $p = -2$, $q = 1$, $b_{02} = 1$. Качественная картина поведения траекторий системы (3) в круге Пуанкаре в этом случае такова:



Литература

1. Савелов А.А. Плоские кривые. – М.: Изд. физ.-мат. лит., 1960. – 294 с.
2. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. – 1952. – Т. 16. Вып. 6. – С. 650–670.
3. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука. – 1973. – 831 с.
4. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. – Минск: Высш. шк., 1979. – 136 с.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

Summary

Qualitative research of cubic differential system of the second order is lead provided that this system has private algebraic integral of the third order.

Поступила в редакцию 23.01.04.

МГПУ им. И.П.Шамякина