УДК 517.917

В.В. Шкут

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИМЕЮЩЕЙ ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВИДЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

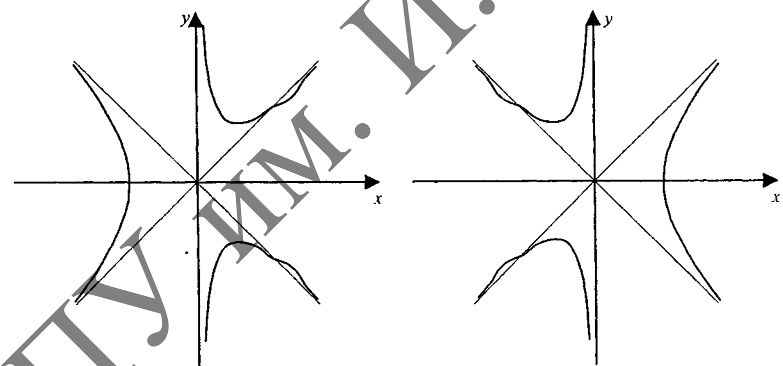
Пусть для системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} a_{ij} x^i y^j, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} b_{ij} x^i y^j, \qquad (1)$$

где $a_{ij},\ b_{ij} \in R$, алгебраическая кривая [1, 49],

$$\omega(x, y) \equiv x^3 - xy^2 + px + q = 0, \quad 4p^3 + 27q^2 > 0, \quad p < 0, \quad q \neq 0 \quad (2)$$

является частным интегралом. Кривая (2) состоит из трех гиперболических ветвей и имеет вид:



$$4p^3 + 27q^2 > 0, \quad p < 0, \quad q > 0 \qquad 4p^3 + 27q^2 > 0, \quad p < 0, \quad q < 0.$$

Лемма. Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{q}{p}a_{21}xy + a_{21}x^2y + \frac{2}{p}xy^2 \equiv P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= y + \frac{3q}{2p}a_{21}x^2 - \frac{q}{2p}a_{21}y^2 + a_{21}x^3 + \frac{3}{p}x^2y - \frac{1}{p}y^3 \equiv Q(x,y). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Для доказательства леммы следует воспользоваться равенством [1]: если кривая $\omega(x,y)=0$ – частный интеграл системы $\frac{dx}{dt} = P(x,y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x,y)$, где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – многочлены степени n, то

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot P + \frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot Q \equiv \omega\cdot F. \quad (4)$$

Здесь $F(x,y)$ – многочлен $n-1$ степени.

В нашем случае равенство (4) имеет вид:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot P + \frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot Q \equiv \omega\cdot a_{21}xy. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что $x=0$ – частный интеграл системы (3).

Замечание. Если $a_{21}=0$, то $y=0$ – особая линия системы (3). Считаем, что $a_{21}\neq 0$.

Из равенства (5) следует, что возможные особые точки системы (3) в конечной части плоскости лежат на линиях $x=0$, $y=0$, $\omega(x,y)=0$. Для отыскания этих особых точек решаем систему

$$\left.\begin{aligned} &xy\,(qa_{21} + pa_{21}x + 2y) = 0, \\ &2py + 3qa_{21}x^2 - qa_{21}y^2 + 2pa_{21}x^3 + 6x^2y - 2y^3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Пусть $x=0$ или $y=0$. Получим особые точки системы (3):

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad (7)$$

$$x_{2,3} = 0; \quad y_{2,3} = \frac{-qa_{21} \pm \sqrt{q^2a_{21}^2 + 16p}}{4}, \quad (8)$$

если $q^2a_{21}^2 + 16p \geq 0$;

$$x_4 = -\frac{3q}{2p}; \quad y_4 = 0. \quad (9)$$

Подстановкой в уравнение (2) проверяется, что точка (9) не лежит на кривой (2).

Пусть $xy\neq 0$. Тогда система (6) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &pa_{21}x + 2y + qa_{21} = 0, \\ &x^3 - xy^2 + px + q = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

В дальнейшем исследование системы (3) проведем при условии, что на кривой (2) нет особых точек системы (3). Это значит, что система (10) не должна иметь действительных решений. Найдем условия для этого. Исключая из системы (10) переменную y получим кубическое уравнение

$$\left(4 - p^2a_{21}^2\right)x^3 - 2pqa_{21}^2x^2 + \left(4p - q^2a_{21}^2\right)x + 4q = 0. \quad (11)$$

Чтобы уравнение (11) не имело действительных решений, необходимо, чтобы $4 - p^2 a_{21}^2 = 0$. Тогда получим уравнение

$$2pqx^2 - \left(p^3 - q^2\right)x - p^2 q = 0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) не имеет действительных решений, если

$$\left(p^3 - q^2\right)^2 + 8p^3 q^2 < 0.$$

С учетом того, что по условию $4p^3 + 27q^2 > 0$, делаем следующий вывод: система (10) не имеет действительных решений, если $4 - p^2 a_{21}^2 = 0$ и система неравенств $4p^3 + 27q^2 > 0$ и $\left(p^3 - q^2\right)^2 + 8p^3 q^2 < 0$ совместна. Итак, пусть, например, $a_{21} = \dfrac{2}{p}$. Тогда система (3) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2q}{p^2}xy + \frac{2}{p}x^2 y + \frac{2}{p}xy^2 \equiv P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= y + \frac{3q}{p^2}x^2 - \frac{q}{p^2}y^2 + \frac{2}{p}x^3 + \frac{3}{p}x^2 y - \frac{1}{p}y^3 \equiv Q(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Заметим, что для особых точек (8) координата

$$y_{2,3} = \frac{-q \pm \sqrt{4p^3 + q^2}}{2p}, \quad 4p^3 + q^2 \geq 0.$$

Если $4p^3 + q^2 = 0$, то имеем одну точку (8).

Далее находим характеристические числа особых точек (7) – (9). Они соответственно такие:

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1; \qquad (7')$$

$$\lambda_1 = 2; \ \lambda_2 = \frac{\left(\pm q - \sqrt{4p^3 + q^2}\right)\sqrt{4p^3 + q^2}}{2p^3}, \qquad (8')$$

если $4p^3 + q^2 > 0$

и $\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 0, \qquad (8'')$

если $4p^3 + q^2 = 0$;

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{8p^3}\left(4p^3 + 27q^2 \pm \sqrt{\left(4p^3 + 27q^2\right) + 432q^4}\right). \qquad (9')$$

Легко видеть, что если $4p^3 + q^2 > 0$, то одна из точек (8) будет узлом, а другая четырехсепаратрисным узлом. Точка (9) – четырехсепаратрисное седло.

Выясним характер сложной особой точки (7) системы (13). Система (13) имеет вид [2, 108]:

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x,y), \ \frac{dy}{dt} = y + \eta(x,y).$$

Здесь $\xi(x,0) \equiv 0$ и $\dfrac{\eta(x,0)}{\xi(x,0)} \not\to 0$, если $x \to 0$. Добьемся того, чтобы $\xi(x,0) \not\equiv 0$ и $\dfrac{\eta(x,0)}{\xi(x,0)} \to 0$, если $x \to 0$ или $\eta(x,0) \equiv 0$. Для этого находим решение уравнения $y + \eta(x,y) = 0$ относительно y в виде $y = \alpha_2 x^2 + \ldots \equiv \varphi(x)$. Подставив в уравнение, получим тождество $\left(\alpha_2 + \dfrac{3q}{p^2}\right)x^2 + \ldots \equiv 0$. Отсюда $\alpha_2 = -\dfrac{3q}{p^2}, \ldots$ Тогда искомое решение будет $\dot{y} = -\dfrac{3q}{p^2}x^2 + \ldots \equiv \varphi(x)$. В системе (13) сделаем замену $y \to \varphi(x) + y$. Получим систему

$$\frac{dx}{dt} = \xi_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = y + \eta_1(x, y)$$

где $\xi_1(x,0) = -\dfrac{6q^2}{p^4}x^3 + \ldots \equiv ax^{\alpha} + \ldots$, и $\eta_1(x,0) = -\dfrac{36q^3}{p^6}x^4 + \ldots \equiv bx^{\beta} + \ldots$.

Видим, что $\xi_1(x,0) \not\equiv 0$ и $\dfrac{\eta_1(x,0)}{\xi_1(x,0)} \to 0$, если $x \to 0$. Так как $a = -\dfrac{6q^2}{p^4} < 0$ и $\alpha = 3$ – нечетное, то, согласно [2, с. 109], точка (7) для системы (13) является четырехсепаратрисным седлом.

Исследуем теперь сложную особую точку (8) при условии, что p и q связаны равенством $4p^3 + q^2 = 0$. В системе (13) сделаем замену: $x \to x$, $y \to y - \dfrac{q}{2p}$, $2dt \to dt$. Получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - \frac{q}{2p^2}x^2 + \frac{1}{p}x^3y + \frac{1}{p}xy^2 \equiv x + \eta(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{3q}{4p^2}x^2 + \frac{q}{4p^2}y^2 + \frac{1}{p}x^3 + \frac{3}{2p}x^2y - \frac{1}{2p}y^3 \equiv \xi(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Здесь $\xi(0, y) = \dfrac{q}{4p^2}y^2 - \dfrac{1}{2p}y^3 \equiv ay^{\alpha} - \dfrac{1}{2p}y^3 \not\equiv 0$ и $\eta(0, y) \equiv 0$.

Так как $a = \dfrac{q}{4p^2} \neq 0$ и $\alpha = 2$ – четное, то [2] точка (8) для системы (13) является седло-узлом.

Найдем особые точки системы (13) в бесконечной части плоскости и выясним их характер. К системе (13) применяем последовательно преобразования Пуанкаре [3]:

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z} \text{ и } x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z}.$$

Получим системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{2}{p} + \frac{3}{p}u + \frac{3q}{p^2}z - \frac{2}{p}u^2 - \frac{3}{p}u^3 - \frac{3q}{p^2}u^2z + uz^2 \equiv \overline{P}(u, z), \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{2}{p}uz - \frac{2}{p}u^2z - \frac{2q}{p^2}uz^2 \equiv \overline{Q}(u, z) \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{3}{p}v + \frac{2}{p}v^2 + \frac{3q}{p^2}vz - \frac{3}{p}v^3 - vz^2 - \frac{2}{p}v^4 - \frac{3q}{p^2}v^3z \equiv \overline{\overline{P}}(v, z), \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{p}z + \frac{q}{p^2}z^2 - \frac{3}{p}v^2z - z^3 - \frac{2}{p}v^3z - \frac{3q}{p^2}v^2z^2 \equiv \overline{\overline{Q}}(v, z) \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Полагая в правых частях системы (15) $z = 0$, получаем уравнение для определения координаты u особых точек $(u; 0)$:

$$(u^2 - 1)(3u + 2) = 0. \text{ Отсюда } u = \pm 1 \text{ и } u = -\frac{2}{3}.$$

Итак, система (13) в бесконечной части плоскости имеет особые точки, не лежащие на «концах» оси Oy:

$$u_1 = 1, \; z = 0; \qquad (17)$$

$$u_2 = -1, \; z = 0; \qquad (18)$$

$$u_3 = -\frac{2}{3}, \; z = 0. \qquad (19)$$

Характеристические числа для них, соответственно, такие:

$$\lambda_1 = -\frac{10}{p},\ \lambda_2 = -\frac{4}{p}; \qquad (17')$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\frac{2}{p}; \qquad (18')$$

$$\lambda_1 = \frac{5}{3p},\ \lambda_2 = \frac{4}{9p}. \qquad (19')$$

Видим, что точки (17) и (19) – узлы. Выясним характер сложной особой точки (18). Для этого сделаем перенос начала координат в точку (18). В системе сделаем замену: $u \to u-1,\ z \to z,\ -\frac{2}{p}dt \to dt$. Получим систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u - \frac{7}{2}u^2 - \frac{3q}{p}uz + \frac{p}{2}z^2 + \frac{3}{2}u^3 + \frac{3q}{2}u^2z - \frac{p}{2}uz^2 \equiv u + \eta(u,z), \\ \frac{dz}{dt} &= -uz - qz^2 + u^2z + quz^2 \equiv \xi(u,z). \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Здесь $\xi(0,z) \not\equiv 0$, но $\frac{\eta(0,z)}{\xi(0,z)} \not\to 0$ при $z \to 0$. Достигнем того, чтобы $\frac{\eta(0,z)}{\xi(0,z)} \to 0$ при $z \to 0$. Находим решение уравнения $u + \eta(u,z) = 0$ относительно u в виде $u = \alpha_2 z^2 + \ldots \equiv\ \equiv \varphi(z)$. Подставив $u = \varphi(z)$ в уравнение, получим $\alpha_2 = -\frac{p}{2}$.

Тогда $u = -\frac{p}{2}z^2 + \ldots \equiv \varphi(z)$. Сделав в системе (20) замену $u \to \varphi(z) + u$, получим систему

$$\frac{du}{dt} = u + \eta_1(u,z),\ \frac{dz}{dt} = \xi_1(u,z), \text{ где}$$

$$\xi_1(0,z) = \xi(\varphi(z), z) = -qz^2 + \ldots \equiv az^{\alpha} + \ldots,$$

$$\eta_1(0,z) = -\varphi'(z)\cdot \xi_1(0,z) = -pqz^3 + \ldots \equiv bz^{\beta} + \ldots.$$

Здесь $\xi_1(0,z) \not\equiv 0$ и $\frac{\eta_1(0,z)}{\xi_1(0,z)} \to 0$, при $z \to 0$. Так как $a = -q \neq 0$ и $\alpha = 2$ – четное, то [2, 109] точка (18) – седло-узел.

Полагая в системе (16) $v = z = 0$, видим, что «концы» оси Oy являются особой точкой системы (13). Характеристические числа $\lambda_1 = \frac{3}{p},\ \lambda_2 = \frac{1}{p}$. Следовательно, «концы» оси Oy – узел.

Из вышеизложенного следует: теорема. Пусть в системе (13) p и q удовлетворяют системе неравенств $4p^3 + 27q^2 > 0$ и $(p^3 - q^2)^2 + 8p^3q^2 < 0$. Тогда в конечной части плоскости система (13) имеет:

1. Точку (7) – четырехсепаратрисное седло, точки (8) – четырехсепаратрисное седло и узел, если $4p^3 + q^2 > 0$, точку (9) – четырехсепаратрисное седло.

2. Точку (7) – четырехсепаратрисное седло, точку (8) – седло-узел, если $4p^3 + q^2 = 0$, точку (9) – четырехсепаратрисное седло:

3. Точку (7) – четырехсепаратрисное седло, точку (9) – четырехсепаратрисное седло.

В бесконечной части плоскости система (13) имеет три узла (17), (19), «концы» оси Oy

и седло-узел (18).

Предельных циклов система (13) не имеет.

Замечание. Аналогично может быть рассмотрен случай, когда $a_{21} = -\frac{2}{p}$.

Литература

1. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. – 1952. – Т. 16. Вып. 6. – С. 659 – 670.

2. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. – Мн.: Выш. шк., 1979. – 136 с.

3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

Summary

Qualitative research of one cubic system of the second order is carried out at presence at it private integral as the algebraic curve of the third order consisting of three hyperbolic branches.

Поступила в редакцию 28.04.05.