УДК 517.917

В.В. Шкут

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИМЕЮЩЕЙ ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВИДЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

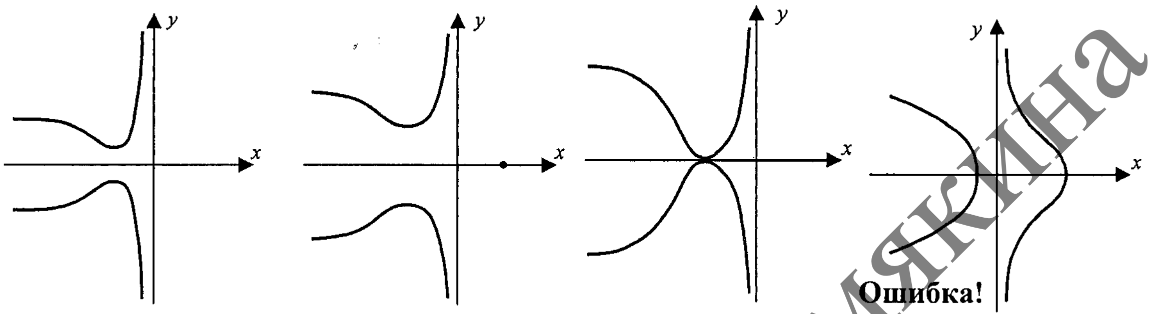
Пусть для системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=2}^{3} a_{ij} x^i y^j, \quad \frac{dy}{dt} = x + \sum_{i+j=2}^{3} b_{ij} x^i y^j, \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, алгебраическая кривая [1, 49]

$$\omega(x, y) \equiv xy^2 + x^2 + px + q = 0, \tag{2}$$

где $p^2 - 4q < 0$ или $p^2 - 4q = 0$ или $q < 0$ является частным интегралом. Кривая (2) имеет вид:



$p^2 - 4q < 0$ $\quad$ $p^2 - 4q = 0,\ p < 0$ $\quad$ $p^2 - 4q = 0,\ p > 0$ $\quad$ $q < 0$

Лемма. Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (pb_{12} - 1)xy + \frac{(p^2 - 2q)b_{12} - p}{q} x^2 y \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= x + \frac{(4q - p^2)b_{12} + p}{2q} x^2 + \frac{1 - pb_{12}}{2} y^2 + b_{12} xy^2 \equiv Q(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для доказательства леммы следует воспользоваться тождеством [2]: если кривая $\omega(x, y) = 0$ – частный интеграл системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – многочлены по x и y степени n с действительными коэффициентами, то

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot P(x, y) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot Q(x, y) \equiv \omega(x, y) \cdot F(x, y). \tag{4}$$

Здесь $F(x, y)$ – многочлен по x и y степени $n - 1$.
В нашем случае тождество (4) имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot P(x, y) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot Q(x, y) \equiv \frac{p^2 b_{12} - p}{q} xy \cdot \omega(x, y). \tag{5}$$

Замечаем, что если $pb_{12} = 1$, то ось Oy – особая линия системы (3). В дальнейшем считаем, что $pb_{12} \neq 1$.

Легко видеть, что поле направлений, определяемых системой (3), симметрично относительно оси Ox. Отсюда следует, что система (3) предельных циклов не имеет. Очевидно также, что $x = 0$ (ось Oy) – частный интеграл системы (3).

Найдем возможные особые точки системы (3) в конечной части плоскости, которые, как следует из тождества (5), лежат на линиях $x = 0$, $y = 0$, $\omega(x, y) = 0$. Приравнивая правые части системы (3) к нулю, получим систему для отыскания особых точек системы (3) в конечной части плоскости:

$$\left.\begin{aligned} & xy\big((pb_{12} - 1)q + ((p^2 - 2q)b_{12} - p)x\big) = 0, \\ & 2qx + ((4q - p^2)b_{12} + p)x^2 + (1 - pb_{12})qy^2 + 2qb_{12}xy^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Решаем систему (6).

Пусть $x=0$ или $y=0$. Тогда получим особые точки

$$x_1=0,\ \ y_1=0 \tag{7}$$

и

$$x_2=\frac{2q}{\left(p^2-4q\right)b_{12}-p},\ \ y_2=0, \tag{8}$$

если $\left(p^2-4q\right)b_{12}-p\neq 0$.

Пусть $xy\neq 0$. Тогда система (6) запишется в виде:

$$\left.\begin{aligned}&(pb_{12}-1)q+\left(\left(p^2-2q\right)b_{12}-p\right)x=0,\\&xy^2+x^2+px+q=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Решая систему (9), получим еще две особые точки системы (3):

$$x_{3,4}=\frac{(pb_{12}-1)q}{\left(2q-p^2\right)b_{12}+p},\ \ y_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{\left(\left(4q-p^2\right)b_{12}^2+1\right)q}{(1-pb_{12})\left(\left(2q-p^2\right)b_{12}+p\right)}}. \tag{10}$$

Находим теперь возможные особые точки системы (3) в бесконечной части плоскости, применяя последовательно к системе (3) преобразования Пуанкаре [3]:

$$x=\frac{1}{z},\ \ y=\frac{u}{z}\ \text{ и }\ x=\frac{v}{z},\ \ y=\frac{1}{z},\ \ \frac{dt}{z^2}\to dt.$$

Получим системы:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du}{dt}=\frac{\left(4q-p^2\right)b_{12}+p}{2q}z+\frac{\left(3q-p^2\right)b_{12}+p}{q}u^2+z^2+\frac{pb_{12}-1}{2}u^2z,\\&\frac{dz}{dt}=\frac{\left(2q-p^2\right)b_{12}+p}{q}uz+(1-pb_{12})uz^2\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dv}{dt}=\frac{\left(p^2-3q\right)b_{12}-p}{q}v^2+\frac{pb_{12}-1}{2}vz-\frac{\left(4q-p^2\right)b_{12}+p}{2q}v^3z-v^2z^2,\\&\frac{dz}{dt}=-b_{12}vz+\frac{pb_{12}-1}{2}z^2-\frac{\left(4q-p^2\right)b_{12}+p}{2q}v^2z^2-vz^3.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Полагая в правых частях системы (11) $z=0$ и приравнивая их к нулю, видим, что «концы» оси Ox – особая точка системы (3). Замечаем также, что если $\left(3q-p^2\right)b_{12}+p=0$, то экватор сферы Пуанкаре является особой линией системы. Считаем, что $\left(3q-p^2\right)b_{12}+p\neq 0$.

Так как правые части системы (12) при $v=z=0$ обращаются в нуль, то «концы» оси Oy также являются особой точкой системы (3). Система (12) при этом не содержит линейных членов.

Далее находим характеристические числа для особых точек (7), (8) и (10). Они, соответственно, такие:

$$\lambda_1=\lambda_2=0; \tag{7'}$$

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{(pb_{12}-1)x_2+\frac{\left(p^2-2q\right)b_{12}-p}{q}x_2^2}; \tag{8'}$$

$$\lambda_1=(1-pb_{12})y_{3,4};\ \ \lambda_2=\frac{p(1-pb_{12})^2}{\left(2q-p^2\right)b_{12}+p}y_{3,4}. \tag{10'}$$

Характеристические числа для «концов» осей Ox и Oy будут $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Выясним характер сложной особой точки (7) системы (3). Система (3) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt}=\eta(x,y),\ \ \frac{dy}{dt}=x+\xi(x,y).$$

Согласно [3, 129], находим решение уравнения $x+\xi(x,y)=0$ относительно x в виде $x\equiv\varphi(y)=\alpha_2 y^2+\ldots$. Подставив $x=\varphi(y)$ в уравнение, получим $\alpha_2=\frac{pb_{12}-1}{2}$, ... Следовательно, $x\equiv\varphi(y)=\frac{pb_{12}-1}{2}y^2+\ldots$. Далее находим

$$f(y)=\eta(\varphi(y),y)=\frac{(pb_{12}-1)^2}{2}y^3+\ldots\equiv ay^\alpha+\ldots$$

Отсюда $a=\frac{(pb_{12}-1)^2}{2}>0,\ \alpha=3$ – нечетное. Тогда [3, 128] точка (7) – четырехсепаратрисное седло.

Аналогичным образом поступаем при выяснении характера «концов» оси Ox при условии, что $\gamma=\frac{(4q-p^2)b_{12}+p}{2q}\neq 0$. Сделав в системе (11) замену времени $\gamma dt\to dt$, получаем систему

$$\frac{du}{dt}=z+\xi(u,z),\ \frac{dz}{dt}=\eta(u,z).$$

Далее решаем уравнение $z+\xi(u,z)=0$ относительно $z\equiv\varphi(u)=\alpha_2u^2+\ldots=$ $=-2\frac{(3q-p^2)b_{12}+p}{(4q-p^2)b_{12}+p}u^2+\ldots$ и находим

$$f(u)\equiv\eta(u,\varphi(u))=-4\frac{((2q-p^2)b_{12}+p)((3q-p^2)b_{12}+p)}{((4q-p^2)b_{12}+p)^2}u^3+$$
$$+8q\frac{(1-pb_{12})((3q-p^2)b_{12}+p)^2}{((4q-p^2)b_{12}+p)^3}u^5+\ldots\equiv au^\alpha+\ldots,$$
$$g(u)\equiv\xi'_u(u,\varphi(u))+\eta'_z(u,\varphi(u))=2\frac{(8q-3p^2)b_{12}+3p}{(4q-p^2)b_{12}+p}u+$$
$$+4q\frac{(pb_{12}-1)((3q-p^2)b_{12}+p)}{((4q-p^2)b_{12}+p)^2}u^3+\ldots\equiv bu^\beta+\ldots .$$

Характер «концов» оси Ox будет зависеть от соотношения между параметрами $a,\ \alpha,\ b,\ \beta$. Заметим, что если $\gamma=0$, то в правых частях системы (11) отсутствуют линейные члены.

Характер особых точек (8) и (10) выясняется по их характеристическим числам при изменении значений параметра b_{12} от $-\infty$ до $+\infty$, и при этом исследование системы (3) проводится в трех случаях: 1) $p^2-4q<0$; 2) $p^2-4q=0$; 3) $q<0$. Результаты исследования характера всех особых точек системы (3) приводятся в табл. 1.

Таблица 1

$p^2-4q<0,\ p<0$						
1	2	3	4	5	6	7
	Характер особых точек					p, q, b_{12}
	7	8	10	«концы» Ox	«концы» Oy индекс	
1	С	Ц	–	ГППЭ	0	$\frac{p^2}{4}<q<\frac{p^2}{3}$ и $b_{12}<\frac{p}{p^2-3q}$ или $q>\frac{p^2}{4}$ и $\frac{1}{p}<b_{12}<\frac{p}{p^2-4q}$

2	С	Ц	–	С	2	$\frac{p^2}{4} < q < \frac{p^2}{2}$ и $\frac{p}{p^2-3q} < b_{12} \le \frac{p}{p^2-2q}$ или $\frac{p^2}{3} \le q < \frac{p^2}{2}$ и $b_{12} \le \frac{p}{p^2-2q}$
3	С	Ц	С, С	ГППЭ	2	$\frac{p^2}{4} < q < \frac{p^2}{2}$ и $\frac{p}{p^2-2q} < b_{12} < \frac{1}{p}$ или $q \ge \frac{p^2}{2}$ и $b_{12} < \frac{1}{p}$
4	С	–	–	ГПЭЭ	0	$q > \frac{p^2}{4}$ и $b_{12} = \frac{p}{p^2-4q}$
5	С	Ц	–	ГППЭ	0	$\frac{p^2}{4} < q \le \frac{p^2}{3}$ и $b_{12} > \frac{p}{p^2-4q}$ или $q > \frac{p^2}{3}$ и $\frac{p}{p^2-4q} < b_{12} < \frac{1}{p^2-3q}$
6	С	Ц	–	С	2	$\frac{p^2}{3} < q \le \frac{p^2}{2}$ и $b_{12} > \frac{p}{p^2-3q}$ или $q > \frac{p^2}{2}$ и $\frac{p}{p^2-3q} < b_{12} \le \frac{p}{p^2-2q}$
7	С	Ц	С, С	ГППЭ	2	$q > \frac{p^2}{2}$ и $b_{12} > \frac{p}{p^2-2q}$
$p^2-4q<0,\ p>0$						
8	С	С	У, У	ГППЭ	0	$\frac{p^2}{4} < q \le \frac{p^2}{3}$ и $b_{12} < \frac{p}{p^2-4q}$ или $q > \frac{p^2}{3}$ и $\frac{p}{p^2-3q} < b_{12} < \frac{p}{p^2-2q}$
9	С	–	У, У	ГППЭ	0	$q > \frac{p^2}{4}$ и $b_{12} = \frac{p}{p^2-4q}$
10	С	С	У, У	ГППЭ	0	$q > \frac{p^2}{4}$ и $\frac{p}{p^2-4q} < b_{12} < \frac{1}{p}$ или $\frac{p^2}{4} < q < \frac{p^2}{3}$ и $b_{12} > \frac{p}{p^2-3q}$
11	С	С	–	ГППЭ	2	$\frac{p^2}{4} < q < \frac{p^2}{2}$ и $\frac{1}{p} < b_{12} \le \frac{p}{p^2-2q}$ или $q \ge \frac{p^2}{2}$ и $b_{12} > \frac{1}{p}$
12	С	С	У, У	С	2	$\frac{p^2}{4} < q < \frac{p^2}{3}$ и $\frac{p}{p^2-2q} < b_{12} < \frac{p}{p^2-3q}$ или $\frac{p^2}{3} \le q < \frac{p^2}{2}$ и $b_{12} > \frac{p}{p^2-2q}$
13	С	С	У, У	С	2	$\frac{p^2}{3} < q \le \frac{p^2}{2}$ и $b_{12} < \frac{p}{p^2-3q}$ или $q > \frac{p^2}{2}$ и $\frac{p}{p^2-2q} < b_{12} < \frac{p}{p^2-3q}$

14	С	С	–	ГППЭ	2	$q > \frac{p^2}{2}$ и $b_{12} \le \frac{p}{p^2 - 2q}$
$p^2 - 4q = 0,\ p < 0$						
15	С	Ц	–	ГППЭ	0	$b_{12} < \frac{4}{p}$ или $b_{12} > \frac{1}{p}$
16	С	Ц	–	С	2	$\frac{4}{p} < b_{12} \le \frac{2}{p}$
17	С	Ц	С, С	ГППЭ	2	$\frac{2}{p} < b_{12} < \frac{1}{p}$
$p^2 - 4q = 0,\ p > 0$						
18	С	С	У, У	ГППЭ	0	$b_{12} < \frac{1}{p}$ или $b_{12} > \frac{4}{p}$
19	С	С	–	ГППЭ	2	$\frac{1}{p} < b_{12} \le \frac{2}{p}$
20	С	С	У, У	С	2	$\frac{2}{p} < b_{12} < \frac{4}{p}$
$p < 0,\ q < 0$						
21	С	Ц	–	ГППЭ	0	$b_{12} < \frac{1}{p}$
22	С	Ц	С, С	ГППЭ	2	$\frac{1}{p} < b_{12} < -\frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}}$
23	С	С	–	ГППЭ	2	$-\frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \le b_{12} \le \frac{p}{p^2 - 2q}$
24	С	С	У, У	С	2	$\frac{p}{p^2 - 2q} < b_{12} < \frac{p}{p^2 - 3q}$
25	С	С	У, У	ГППЭ	0	$\frac{p}{p^2 - 3q} < b_{12} < \frac{p}{p^2 - 4q}$
26	С	–	У, У	ГГПП	0	$b_{12} = \frac{p}{p^2 - 4q}$
27	С	С	У, У	ГППЭ	0	$\frac{p}{p^2 - 4q} < b_{12} < \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}}$
28	С	ГП ПЭ	–	ГППЭ	0	$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}}$
29	С	Ц	–	ГППЭ	0	$b_{12} > \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}}$
$p > 0,\ q < 0$						
30	С	С	У, У	ГППЭ	0	$b_{12} < -\frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}}$
31	С	ГП ПЭ	–	ГППЭ	0	$b_{12} = -\frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}}$

32	С	Ц	–	ГППЭ	0	$-\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}} < b_{12} < \frac{p}{p^2-4q}$
33	С	–	–	ЭЭ	0	$b_{12} = \frac{p}{p^2-4q}$
34	С	Ц	–	ГППЭ	0	$\frac{p}{p^2-4q} < b_{12} < \frac{1}{p^2-3q}$
35	С	Ц	–	С	2	$\frac{p}{p^2-3q} < b_{12} \le \frac{p}{p^2-2q}$
36	С	Ц	С, С	ГППЭ	2	$\frac{p}{p^2-2q} < b_{12} \le \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}$
37	С	С	–	ГППЭ	2	$\frac{1}{\sqrt{p^2-4q}} < b_{12} < \frac{1}{p}$
38	С	С	У, У	ГППЭ	0	$b_{12} > \frac{1}{p}$

Обозначения: С – четырехсепаратрисное седло, Ц – центр, У – узел, Г – гиперболический сектор, П – параболический сектор, Э – эллиптический сектор.

Литература

1. Савелов А.А. Плоские кривые. – М.: Изд. физ.-мат. лит. – 1960. – 294 с.
2. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ, 1952. – Т. 16. Вып. 6. – С. 650–670.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
4. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. – Мн.: Выш. шк., 1979. – 136 с.

Summary

Character of special points of one cubic system of the second order having private integral as an algebraic curve of the third order is found out.

Поступила в редакцию 07.02.05.