## МАТЭМАТЫКА

УДК 519.240

*С.Н. Гуз, М.Д. Юдин*

# ЗАВИСИМОСТЬ ПУПЫРЧАТОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТ РАСПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ПУАССОНОВСКИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В работах [1–3] пупырчатое распределение было получено как предельное распределение сумм зависимых случайных двумерных векторов. В [3] даны необходимые и достаточные условия сходимости распределений сумм зависимых векторов к пупырчатым распределениям.

Здесь мы исследуем зависимость предельного пупырчатого распределения сумм зависимых случайных векторов от расположения точечных носителей пуассоновских вероятностей.

Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, – система серий двумерных случайных векторов, определенных при каждом $n$ на общем вероятностном пространстве, координаты которых имеют ограниченные дисперсии, $\xi_{ns}=\left(\xi_{ns}^{(1)},\xi_{ns}^{(2)}\right)$, $x,t\in R^2$, $x=\left(x^{(1)},x^{(2)}\right)$, $t=(t_1,t_2)$, $(\bullet,\bullet)$ – скалярное произведение.

Центрируем векторы системы $\{\xi_{ns}\}$, положив $\eta_{ns}=\xi_{ns}-M\xi_{ns}$, где $\eta_{ns}=\left(\eta_{ns}^{(1)},\eta_{ns}^{(2)}\right)$. Введем ковариационную матрицу $B_n=\left\|b_{n(i,j)}\right\|$, где $b_{n(i,j)}=\sum\limits_{0\le|s-p|\le m_n} M\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)};|\xi_{ns}|\le\varepsilon,|\xi_{np}|\le\varepsilon\right)$, $i,j=1,2$, $\varepsilon>0$, $m_n$ определяется в теореме 1, функцию

$$K_n(x)=\sum_{s=1}^{n}M\left(\eta_{ns}^2;\eta_{ns}\le x\right),$$

где $\eta_{ns}\le x$ означает $\eta_{ns}^{(i)}\le x_i$, $i=1,2$ [4] и медленно меняющуюся функцию $h(n)$ при $n\to\infty$ [5].

Пусть далее $\delta_k$ – $\tau$ –окрестность точки $x_k=\left(x_k^{(1)},x_k^{(2)}\right)$, $x_k\ne 0$ на плоскости.

Мы назовем точку $x_k$ носителем пуассоновской вероятности с весом $\lambda_k$, если при любом $\tau>0$, $0<\tau<|x_k|$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}P\{\eta_{ns}\in\delta_k\}=\lambda_k.$$

В [3] доказана

**Теорема 1.** *Пусть случайные векторы системы* $\{\xi_{ns}\}$ $m_n=m_0n^{1/8-\rho}$ *зависимы, где* $m_0$ *– любое постоянное число,* $0<\rho\le 1/8$. *Кроме того, найдутся такие* $H_1$, $H_2$ *и* $n_0$, *что при* $n\ge n_0$ *будут выполняться условия:*

$$\max_{s,i}M\eta_{ns}^{(i)2}\le\frac{H_1h(n)}{n},\quad \max_{s,r,q,i,j,k}M\left|\eta_{ns}^{(i)}\eta_{nr}^{(j)}\eta_{nq}^{(k)}\right|\le\frac{H_2h(n)}{n^{3/2}},$$

*где* $0\le|s-r|\le m_0n^{1/4-\rho}$, $0<|s-q|\le m_0n^{1/4-\rho}$. *Тогда для того чтобы суммы* $S_n=\sum\limits_{s=1}^{n}\eta_{ns}$ *имели при* $n\to\infty$ *предельное распределение, логарифм характеристической функции (х. ф.) которого*

$$\psi(t)=\sum_{k=1}^{\nu}\lambda_k\left(e^{i(t,x_k)}-1-i(t,x_k)\right)-\frac{(t,Bt^*)}{2},$$

*где* $t^*$ *– вектор-столбец, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, *точки* $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ *были носителями пуассоновских вероятностей с весами* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ *при* $0 < \tau < \min|x_k - x_i|$, $k = \overline{1,\nu}$, $i = \overline{0,\nu}$, $x_0 = 0$, *и*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{\bigcup\limits_{k=0}^{\nu}\delta_k} x^2 dP\{\eta_{ns} \le x\} = 0,$$

*где* $\delta_0$ *–* $\tau$ *– окрестность нуля.*

**Замечание**. Если $\sum\limits_{s=1}^{n} M\xi_{ns} \to l_0 = \left(l_0^{(1)}, l_0^{(2)}\right)$, то в условиях теоремы 1 суммы $S_n^* = \sum\limits_{s=1}^{n}\xi_{ns}$ будут иметь предельные распределения, логарифм х.ф. которого

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\nu}\lambda_k\left(e^{i(t,x_k)} - 1 - i(t,x_k)\right) - \frac{(t,Bt^*)}{2} + i(t,l_0),$$

что следует из свойств х.ф.

Распределение с х. ф. $e^{\psi(t)}$ – композиция (свертка) $\nu$ распределений Пуассона вдоль прямых $x = ax_k$, $a \ge 0$, $k = \overline{1,\nu}$ и нормального распределения с корреляционной матрицей $B^{-1}$, обратной матрице **B**. Плотность вероятности этой композиции имеет вид:

$$p(x) = \frac{e^{-\sum\limits_{k=1}^{\nu}\lambda_k}\sqrt{\left|B^{-1}\right|}}{2\pi}\sum_{\substack{m_k=0\\ k=\overline{1,\nu}}}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{\nu}\frac{\lambda_k^{m_k}}{m_k!}\right)exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z, B^{-1}z^*\right)\right\}, \tag{1}$$

где $z = x - \left(l_0 - \sum\limits_{k=1}^{\nu}\lambda_k x_k\right) - \sum\limits_{k=1}^{\nu} m_k x_k$, $x = (x_1, x_2)$. Распределения с плотностью (1) мы называем ***пупырчатыми*** (см. рис. 1–3).

Рассмотрим случай, когда число носителей пуассоновских вероятностей $\nu = 2$, $x_1 = \left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}\right)$, $x_2 = \left(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}\right)$. Формула (1) примет вид:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{\left|B^{-1}\right|}}{2\pi}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}}{m_1!\,m_2!}exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z, B^{-1}z^*\right)\right\}, \tag{2}$$

где $z = x - (l_0 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) - m_1 x_1 - m_2 x_2$.

Пусть $B^{-1} = \|c_{ij}\|$, $i, j = 1,2$. Нами проведено компьютерное исследование зависимости пупырчатого распределения (2) от расположения носителей пуассоновских вероятностей $x_1$, $x_2$.

Оказалось, что поверхность плотности (2) располагается, в основном, между прямыми $x = ax_1$, $x = ax_2$, $a \ge 0$. За пределы угла $\angle x_1 o x_2$ заходит незначительная часть вероятности, появляющаяся как результат сглаживания пуассоновских вероятностей нормальным компонентом, который может появиться только как результат зависимости между слагаемыми [6]. При суживании угла между прямыми $x = ax_1$, $x = ax_2$ поверхность плотности (2) сжимается и вытягивается в направлении биссектрисы угла, оставаясь, в основном, в угле $\angle x_1 o x_2$. Наконец, когда носители $x_1$, $x_2$ оказываются на одной прямой, поверхность плотности (2) располагается и вытягивается еще более вдоль этой прямой. Это поведение пупырчатого распределения наглядно иллюстрируют изображения поверхностей плотности (2) при различных расположениях носителей пуассоновских вероятностей, полученные по разработанной нами компьютерной программе.

На рис. 1 носители пуассоновских вероятностей $x_1 = (1; 0)$, $x_2 = (0; 1)$ расположены на осях координат.

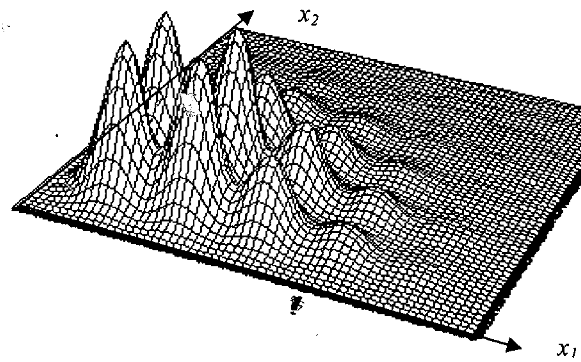


Рис. 1. $x_1 = (1; 0)$, $x_2 = (0; 1)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $c_{11} = c_{22} = 14$, $c_{12} = c_{21} = 2$, $\ell_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (1; 1)$.

На рис. 2 носители $x_1 = (2; 1)$, $x_2 = (1; 2)$ расположены на лучах, выходящих из начала координат и составляющих между собой острый угол.

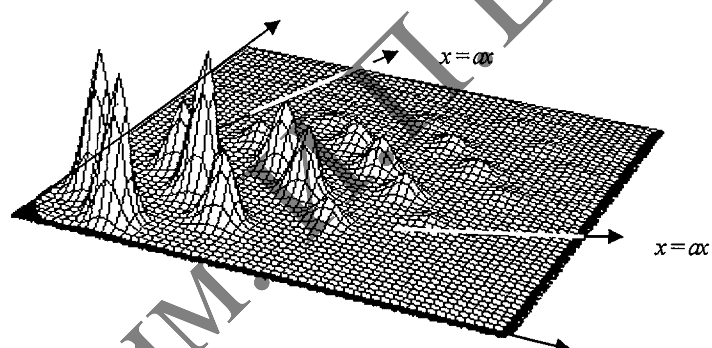


Рис. 2. $x_1 = (2; 1)$, $x_2 = (1; 2)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $c_{11} = c_{22} = 14$, $c_{12} = c_{21} = 2$, $\ell_0 = (1; 1)$.

На рис. 3 носители $x_1 = (1; 1)$, $x_2 = (2; 2)$ расположены на одной прямой.

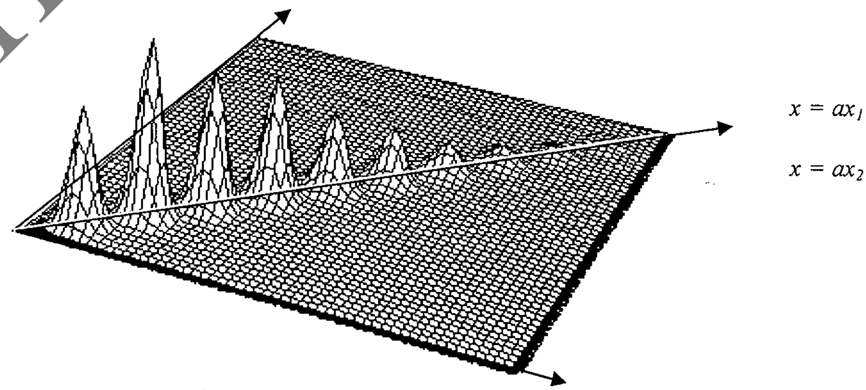


Рис. 3. $x_1 = (1; 1)$, $x_2 = (2; 2)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $c_{11} = c_{22} = 14$, $c_{12} = c_{21} = 2$, $\ell_0 = (1; 1)$.

**Замечание.** В теореме 1 условие $m_n$-зависимости можно заменить на условие выполнения равномерно сильного перемешивания, коэффициент которого $\beta(\tau) = o\left(\tau^{-3-\delta}\right)$, $\delta > 0$, но при этом условие $M\eta_{ns}^{(i)2} \leq \frac{H_1 h(n)}{n}$ нужно заменить на $M\eta_{ns}^{(i)2} \leq \frac{H_1}{n}$ [7].

### *Литература*

1. Гуз С.Н., Сергиевич Н.В., Юдин М.Д. О влиянии зависимости случайных слагаемых на предельные распределения их сумм // Весці НАН Беларусі. – 2002. – № 3. – С. 30–34.
2. Гуз С.Н., Сергиевич Н.В., Юдин М.Д. Сложное пуассоновское распределение в моделировании некоторых деформаций // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага інстытута. – 1999. – № 2. – С. 26–30.
3. Гуз С.Н., Сергиевич Н.В., Юдин М.Д. Необходимые и достаточные условия сходимости распределений сумм зависимых векторов к пупырчатым распределениям // Теория вероятностей, математическая статистика и их применение: Материалы научной конференции. Минск, – 2004. – С. 17–21.
4. Биллинсгли П. Сходимость вероятностных мер. – М, 1977.
5. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. – М., 1965.
6. Юдин М.Д. Применение обобщенной формулы Колмогорова к суммам зависимых векторов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 3. – С. 28–31.
7. Yudin M.D. About limiting distributions of the sums of intermixing random vectors with restricted variances // Buletinul Academiei de stiinte a Republicii Moldova. – 2002. – № 1 (38). – P. 104–110.

### *Summary*

Limiting distribution of the sums of dependent random vectors is obtained.

*Поступила в редакцию 28.03.05.*