Л. А. ИВАНЕНКО[1], А. С. АВЛАСЕНКО[2]
[1]МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)
[2]Средняя школа № 16 г. Мозыря (г. Мозырь, Беларусь)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕСТАНДАРТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ТВОРЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ УЧАЩИХСЯ

Задачи, связанные с арифметической прогрессией, являются одними из самых интересных в школьном курсе математики. В общеобразовательной школе данная тема изучается в девятом классе. Теоретические сведения, связанные с прогрессиями, впервые встречаются в дошедших до нас документах Древней Греции. Еще древние вавилоняне использовали некоторые общие приемы решения задач на прогрессии. В настоящее время мы рассматриваем прогрессии как частные случаи числовых последовательностей.

Условно задачи учебного пособия [1] по теме «Арифметическая прогрессия» можно разделить на две группы: стандартные и нестандартные. В стандартных задачах явно указывается, что решение задачи связано с использованием формул и свойств прогрессии. Эти задачи относятся к обязательному уровню усвоения учебного материала. Однако наибольший интерес представляют творческие задания, где нет явных указаний на метод решения. Для их решения можно использовать различные методы, в том числе основанные на свойствах арифметической прогрессии.

Рассмотрим пример 1. Новогодние подарки, которых больше 200, но меньше 400 разложили в коробки по 6 штук. Определить сколько всего было подарков, если известно, что при попытке разложить их по 9 штук 3 подарка оказались лишними, а при попытке разложить их по 7 штук 2 подарка остались лишними.

Данная задача может быть решена учащимися с использованием арифметической прогрессии. Подарки разложили:
по 6 штук, следовательно, это числа 204, 210, 216, 222, 228, 234…;
по 9 и 3 осталось лишними, это числа 201, 210, 219, 228, 237, 246…;
по 7 и 2 осталось лишними, это числа 205, 212, 219, 226, 233, 240…

Для этих прогрессий $d_1 = 6, d_2 = 9, d_3 = 7$. Для первых двух последовательностей можно выбрать общие члены, которые так же образуют арифметическую прогрессию. Их первое общее число 210, следующее будет через 36, так как знаменатель полученной прогрессии находится по формуле $d_{1,2}$=НОК(d_1, d_2), то есть $d_{1,2} = \text{НОК}(6{,}9) = 36$. Получим последовательность чисел: 210, 246, 282, 318, 354…

Для второй и третьей последовательности также можно выбрать общие члены, которые так же образуют арифметическую прогрессию. Их первое общее число 219, следующее будет через 63, $d_{2,3} = \text{НОК}(9{,}7) = 63$. Получим последовательность чисел: 219, 282… Таким образом, общим для трех прогрессий будет число 282.

В приведенной задаче количество членов прогрессии ограничено небольшим промежутком, поэтому использование нестандартного, но относительно не сложного метода, позволило её решить перебором. При более широком диапазоне чисел решение усложняется. Мы хотим рассмотреть еще один способ решения данной задачи. Для этого используется метод, основанный на диофантовых уравнениях.

Линейным диофантовым уравнением называется уравнение с несколькими неизвестными вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$, где (известные) коэффициенты $a_1, a_2 \dots a_n$, и с – целые числа, а неизвестные $x_1, x_2, \dots x_n$ также являются целыми числами. К решению подобных уравнений сводятся различные текстовые задачи, в которых неизвестные величины выражают количество предметов, поэтому являются натуральными (или неотрицательными целыми) числами. Теория решения подобных уравнений является классическим разделом элементарной математики. В ней необходимо проводить аккуратные рассуждения, базирующиеся на определенных понятиях теории чисел. Конкретные задачи такого рода были решены еще в Древнем Вавилоне около 4 тысяч лет тому назад. Древнегреческий мыслитель Диофант, который жил около 2 тысяч лет тому назад, в своей книге «Арифметика» решил большое число таких и более сложных уравнений в целых числах и описал общие методы их решения. При этом каждая конкретная задача в целых числах может решаться с помощью разных методов.

Используем данный метод для решения ранее приведенной задачи. Пусть n – количество подарков. Согласно условию задачи $200 < n < 400$.
Составим систему уравнений

$$\begin{cases} n = 6x \\ n = 9y + 3 \\ n = 7z + 2 \end{cases}$$

Приравняв первое и второе уравнения получим: $2x - 3y = 1$.
Частным решением уравнения является пара (2;1)
Воспользуемся способом нахождения общего решения:

$$-\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

$$2(x-2) - 3(y-1) = 0$$

$2(x-2) = 3(y-1)$. Введем параметр k.

Получим, что $\begin{cases} x = 3k + 2 \\ y = 2k + 1 \\ z = \frac{18k+10}{7} \end{cases}$, где k - целое число.

Перебирая возможные k из промежутка от 11 до 20 и учитывая, что z натуральное число находим, что искомое число 282.

Диофантовы уравнения, как метод решения математических задач, не рассматривается в школьном курсе математики. Однако, анализ задач, предлагаемых учащимся на различных турах олимпиад, позволяет сделать вывод, что достаточна большая часть из них легко решается с помощью диофантовых уравнений. Следовательно, наиболее мотивированные учащиеся должны знать этот метод решения.

Рассмотрим еще один пример, решение которого можно рассмотреть с учащимися на факультативных занятиях в 9 классе.

Пример 2. Учительница принесла в класс счетные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по 2 палочки в каждый пакетик, то осталась 1 лишняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не осталось. Сколько, самое меньшее, было счетных палочек?

Для решения этой задачи используем диофантовы уравнения.

Пусть n – количество палочек. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} n = 2x + 1 \\ n = 13y + 7; \\ n = 9z \end{cases}$$

Приравняв первое и вторoе уравнения получим: $2x - 13y = 6$.

Частным решением уравнения является пара (16;2)

Воспользуемся способом нахождения общего решения:

$$-\begin{cases} 2x - 13y = 6 \\ 2 \cdot 16 - 13 \cdot 2 = 6 \end{cases}$$

$$\overline{2(x - 16) - 13(y - 2) = 0}$$

$2(x - 16) = 13(y - 2)$. Введем параметр k.

Получим, что $\begin{cases} x = 13k + 16 \\ y = 2k + 2 \\ z = \frac{26k+33}{9} \end{cases}$, где k – целое число.

Перебирая возможные значения k и учитывая, что z натуральное число находим, что искомое число 189.

Таким образом, использование нескольких, в том числе нестандартных методов решения задач, содействует повышению интеллектуальной культуры учащихся, развивает креативные, творческие способности учащихся.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра : учеб. пособие для 10 кл. учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Е. П. Кузнецова [и др.] ; под ред. Л. Б. Шнепермана. – Минск : Нар. асвета, 2013.