В. В. ДАВЫДОВСКАЯ
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ПРИ РЕШЕНИИ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

Решение многих задач в рамках учебных программ ВУЗов по различным дисциплинам из областей физики, экономики, техники, экологии, биологии и др. часто требует решения уравнений связывающих производные некоторой функции (первую, вторую и т. д.), саму эту функцию и независимую переменную. Как правило, при решении такого рода задач мы имеем дело с физическими системами, которые являются нелинейными и описываются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Такие уравнения не имеют аналитического решения, и в этом случае приходится использовать численные методы решения дифференциальных уравнений. В настоящее время существует целый ряд систем высокого уровня, среди которых Mathematica, Maple, MathCad, MatLab и др., позволяющих эффективно решать различные математические задачи такого рода.

Рассмотрим возможности математических пакетов MathCad и MatLab на примере решения инженерной задачи для исследования механизма, связывающего клавиши пианино с молоточками. В статье [1] была предложена математическая модель этого процесса с целью выяснить, нельзя ли усовершенствовать данный механизм.

Рассмотрим подробней физическую сторону этой модели. Процесс звукоизвлечения заключается в следующем: механическая энергия при ударе пальцами исполнителя по клавише (механизм генерации) преобразуется с помощью сложной системы рычагов (клавишного механизма) в движение молоточка, который ударяет по струнам (вибраторам), передавая им эту энергию, что приводит к возбуждению в них колебаний; при этом сам он отлетает назад. Когда пианист освобождает клавишу, клавишный механизм опускает на струну демпфер; при этом колебания струны достаточно быстро затухают. Звук непосредственно от струн слаб и перестает восприниматься слухом на расстоянии 3–5 м от инструмента, поэтому в фортепиано используется дека (резонатор).

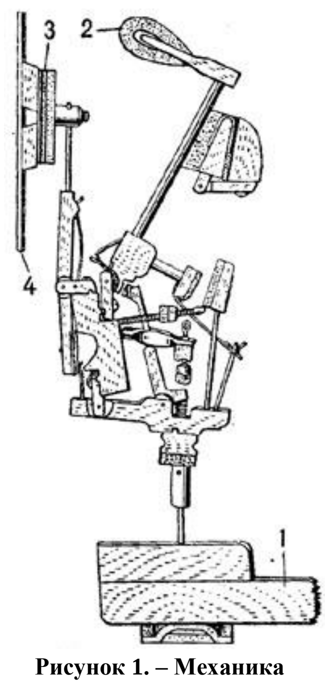

Рисунок 1. – Механика пианино: 1 – клавиша, 2 – молоточек, 3 – демпфер, 4 – струна.

Колебания струн через подставки (штеги) передаются деке, в которой также возбуждаются колебания. Поскольку дека имеет относительно большую площадь, излучаемый ею звук обеспечивает достаточно высокий уровень акустической энергии (пропорциональный площади излучения). Таким образом, дека усиливает звук и модифицирует его спектр за счет своих множественных резонансов. Реальный механизм звукоизвлечения чрезвычайно сложен и служит предметом многочисленных исследований [2].

Однако, специфическая особенность системы извлечения звука в фортепиано состоит в следующем: перед тем как ударить по струне, молоточек отрывается от разгоняющего механизма и «свободно летит» по инерции последнюю часть пути. Соударение молоточка со струной происходит без непосредственного участия исполнителя: он запускает механизм, но не управляет им после нажатия клавиши (он может управлять силой и скоростью удара только в момент соприкосновения с ней) – поэтому тембр звучания инструмента в очень большой степени зависит от физико-механических параметров молоточков, струн, деки, клавишного механизма и других элементов конструкции [2].

Рассмотрим нелинейную математическую модель звукоизвлечения [1]:

$$\ddot{x}_1 = \frac{F}{m_1} - (x_1 - x_2)(k_1 + k_2 x_2)\frac{1}{m_1} - \frac{k_3}{m_1}(x_1 - x_2)^2, \tag{1а}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{b x_2^2 + (x_1 - x_2)(k_1 + k_2 x_2) - 0{,}5 k_3 (x_1 - x_2)^2}{a - b x_2}. \tag{1б}$$

В этих дифференциальных уравнениях x_1 – смещение клавиши вниз, x_2 – смещение молоточка вперед, F – направленная вниз сила, действующая на клавишу.

Для моделирования будем использовать следующие параметры:
$m_1 = 0{,}074$ кг, $a = 0{,}406$ кг, $b = 18{,}3$ кг/м, $k_1 = 1{,}16 \cdot 10^4$ Н/м, $k_2 = 0{,}525 \cdot 10^6$ Н/м^2, $k_3 = 1{,}1 \cdot 10^6$ Н/м^2, $0 < F < 80$ Н.

Рассмотрим численное решение данной задачи в математических пакетах MatLab и MathCAD, которое описывало бы движение этой системы при $F = 80$ Н в интервале времени $0 \le t \le 30$ мс.

Для того, чтобы воспользоваться встроенными функциями MatLab и MathCAD, для решения системы уравнений (1а, 1б), необходимо исходные уравнения второго порядка представить в виде системы уравнений первого порядка [3, 4]. Для этого введем обозначения:

$$y_1 = x_1 \text{ и } y_2 = \partial x_1/\partial t,\ \partial y_2/\partial t = \partial^2 x_1/\partial t^2, \tag{2а}$$
$$y_3 = x_2 \text{ и } y_4 = \partial x_2/\partial t,\ \partial y_4/\partial t = \partial^2 x_2/\partial t^2, \tag{2б}$$

тогда уравнение (2) может быть представлено в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} = y_2;\ \dfrac{\partial y_3}{\partial t} = y_4 \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t} = \dfrac{F}{m_1} - (y_1 - y_3)(k_1 + k_2 y_3)\dfrac{1}{m_1} - \dfrac{k_3}{m_1}(y_1 - y_3)^2 \\ \dfrac{\partial y_4}{\partial t} = \dfrac{b y_3^2 + (y_1 - y_3)(k_1 + k_2 y_3) - 0{,}5 k_3 (y_1 - y_3)^2}{a - b y_3}. \end{cases} \tag{3}$$

В MatLab имеется ряд функций для решения задачи Коши. Одна из них – ode45 – использует метод Рунге-Кутты четвёртого-пятого порядка точности с автоматическим выбором размера шага.

Решение данной задачи можно осуществить и в математическом пакете MathCAD. Для решения применялась встроенная функция MathCAD – rkfixed, которая использует тот же метод, что и ode45 в MatLab [3, 4].

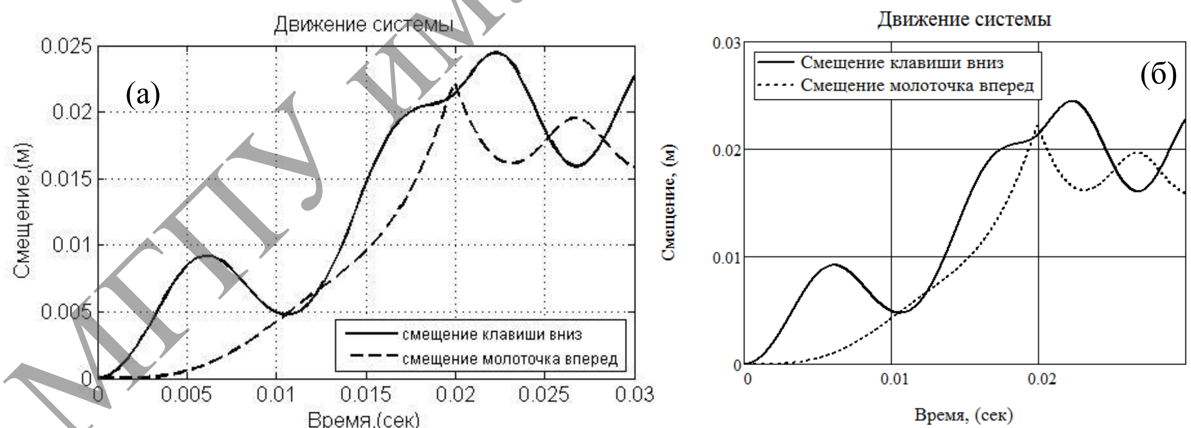

Рисунок 2. – Результат решения системы дифференциальных уравнений (смещения x_1 и x_2) (а) – решение в MatLab, (б) – решение в MathCAD.

Анализируя графики на рисунке 2, можно сказать, что удар молоточка о струну происходит через 0,02 с после нажатия клавиши и появляется звук.

Данная модель также позволяет получить зависимость скорости движения клавиши и молоточка от времени. Из рисунка 2 можно видеть, что решения данной задачи получились одинаковые и в MatLab и в MathCAD, поэтому выбор математического пакета остается за пользователем исходя из его предпочтений и удобства работы. Современные математические пакеты имеют широкий спектр возможностей и перспективы использования для решения задач различного рода.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Oledzki, A. Dynamics of Piano Mechanisms / A. Oledzki // Mech. and Mach. Theory / – 1972. – N 7. – P. 373–385.

2. Хайкин, С.А. Физические основы механики / С.А Хайкин. – М., 1971. – 752 с.

3. Шампайн, Л.Ф. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB: учебное пособие. 1-е изд. / Л.Ф. Шампайн, И. Гладвел, С. Томпсон. – СПб.: Лань, 2009. – 304 с.

4. Охорзин, В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD: учебное пособие / В.А. Охорзин. – 3-е изд. – СПб.: Лань, 2009. – 352 с.