РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СВЯЗАННЫХ ВОЛН

Пиляк К.Ю. *(УО МГПУ им. И. П. Шамякина, г. Мозырь)*
Научный руководитель *– В.В. Шепелевич, д-р физ.-мат. наук, профессор*

Метод решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью теории матриц можно применить к решению систем уравнений связанных волн в голографии.

Решение таких систем уравнений аналогично решению системы матричного уравнения $x' = Ax$с одним лишь отличием в том, что искомые функции зависят не от времени t, а от координаты z.

Систему уравнений связанных волн можно заменить одним матричным уравнением $x' = Ax$. Нетрудно убедиться в существовании решения этого уравнения. Пусть дано начальное условие $x(0) = c$. Тогда, разложив искомую функцию в ряд Тейлора, имеем $x(z) = c + zAx_0 + \frac{z^2}{2!}A^2x_0 + \cdots = \left(E + zA + \frac{z^2}{2!}A^2 + \cdots\right)c = e^{Az}c$. В конечном итоге искомая функция сводится к виду $x(z) = \sum_{k=1}^{s} y_{k1} e^{\lambda_k z}$, где каждый элемент $x(z)$ будет комбинацией показательных функций без добавления многочленов.

Для решения задачи о дифракции света на пропускающей голографической фазовой ненаклонной решетке, записанной в кубическом оптически активном фоторефрактивном кристалле произвольного среза, в режиме Брэгга воспользуемся системой уравнений

$$R'_\perp = \alpha_R R_{||} + ie^{-i\delta}\kappa_1^R S_\perp + ie^{-i\delta}\kappa_2^R S_{||},$$
$$R'_{||} = -\alpha_R R_\perp + ie^{-i\delta}\kappa_3^R S_\perp + ie^{-i\delta}\kappa_4^R S_{||},$$
$$S'_\perp = ie^{i\delta}\kappa_1^S R_\perp + ie^{i\delta}\kappa_2^S R_{||} + \alpha_S S_{||},$$
$$S'_{||} = ie^{i\delta}\kappa_3^S R_\perp + ie^{i\delta}\kappa_4^S R_{||} - \alpha_S S_\perp.$$

Здесь $\kappa_1^R = \frac{e_1 \kappa e_1}{cos\varphi_R}$, $\kappa_2^R = \frac{e_1 \kappa e_S}{cos\varphi_R}$, $\kappa_3^R = \frac{e_R \kappa e_1}{cos\varphi_R}$, $\kappa_4^R = \frac{e_R \kappa e_S}{cos\varphi_R}$, $\alpha_R = \frac{\alpha}{cos\varphi_R}$, $\alpha_S = \frac{\alpha}{cos\varphi_S}$. $R_{||}, S_{||}, R_\perp, S_\perp$ – комплексные векторные амплитуды волн R и S.

Решив систему для случая краевых условий $R_\perp(0) = R_\perp^0, R_\parallel(0) = R_{||}^0, S_\perp(0) = S_\parallel(0) = 0$, имеем

$$R(z) = g\{(A_R R_\perp^0 + B_R R_\parallel^0)e_1 + (C_R R_\perp^0 + D_R R_\parallel^0)e_R\},$$
$$S(z) = g\{(A_S^R R_\perp^0 + B_S^R R_\parallel^0)e_1 + (C_S^R R_\perp^0 + D_S^R R_\parallel^0)e_S\}ie^{i\delta}.$$

Здесь $A_R, B_R, C_R, D_R, A_S^R, B_S^R, C_S^R, D_S^R$ представляют собой функции от переменной z, $g = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}$.

Литература

1. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Изд-во «Наука», 1978. – 280 с.

2. Шепелевич, В.В. Голография в фоторефрактивных оптически активных кристаллах: монография / В.В. Шепелевич. – Минск : Изд. центр БГУ, 2012. – 254 с.