УДК 517.917

В. В. Шкут

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КУБИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Найдены и исследованы особые точки одной дифференциальной системы второго порядка с кубическими нелинейностями, имеющей частный интеграл в виде распадающейся алгебраической кривой третьего порядка.

Введение

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{10}x + a_{01}y + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \\ \frac{dy}{dt} &= b_{10}x + b_{01}y + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$.

Предполагается, что для системы (1) алгебраическая кривая

$$\omega(x, y) \equiv x^3 - xy^2 + px^2 + qx - 2sy + r = 0 \tag{2}$$

является частным интегралом и при этом предположении находятся и исследуются особые точки системы (1).

Результаты исследования и их обсуждение

Лемма. Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{3p^2}{8}x \mp \frac{p^2}{8}y - 4x^3 \pm 2x^2y - 2xy^2 \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \mp\frac{7p^2}{8}x - \frac{3p^2}{8}y \pm x^3 - 7x^2y \pm xy^2 + y^3 \equiv Q(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

при этом $q = \frac{3p^2}{8}$, $s = \pm\frac{p^2}{16}$, $r = \frac{p^3}{16}$.

При доказательстве леммы используется следующее утверждение [1]: если кривая $\omega(x, y) = 0$ является частным интегралом системы $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$, где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – многочлены степени n по x и y с действительными коэффициентами, то

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot P(x, y) + \frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot Q(x, y) \equiv \omega(x, y)\cdot F(x, y), \tag{4}$$

где $F(x, y)$ – многочлен степени $n-1$ по x и y. В нашем случае тождество (4) такое:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot P(x, y) + \frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot Q(x, y) \equiv 4x\cdot(p - 3x - y)\cdot\omega(x, y). \tag{5}$$

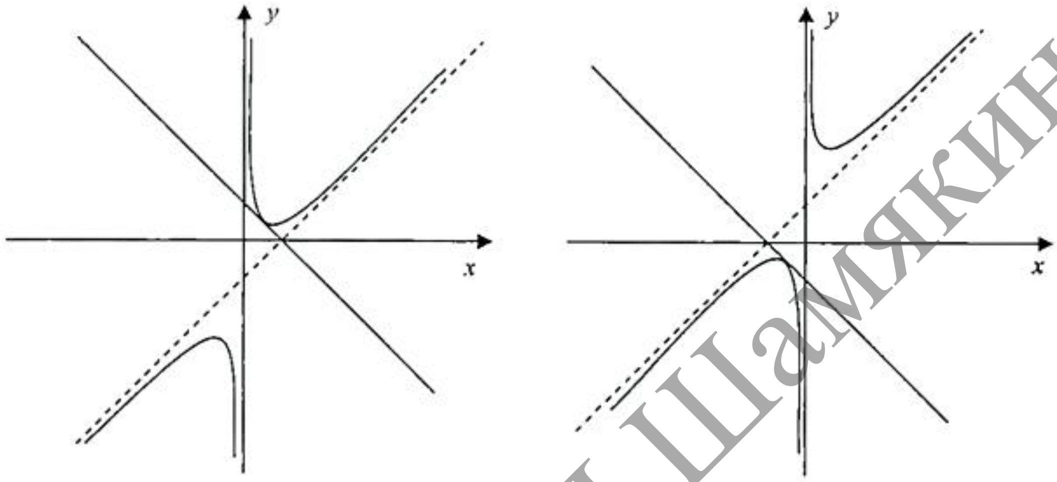
Заметим, что нижний знак в системе (3) соответствует $s < 0$, а верхний – $s > 0$. Далее, кривая (2) состоит из прямой и двух гиперболических ветвей, при этом

МГПУ им. И.П.Шамякина

$$\omega(x,\,y) \equiv \left(x \mp y + \frac{p}{2}\right)\left(x^2 - xy + \frac{p}{2}y + \frac{p^2}{8}\right) = 0. \tag{6}$$

В дальнейшем качественное исследование системы (3) проведено в случае, когда $s<0$. Случай $s>0$ рассматривается аналогично.

Кривая (6) при $s<0$ имеет вид:



$p<0$ $p>0$

Находим особые точки системы (3) в конечной части плоскости. Как следует из тождества (5), они могут лежать на линиях:

$$x = 0, \quad 3x + y + p = 0, \quad x + y + \frac{p}{2} = 0, \quad x^2 - xy + \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{8} = 0.$$

Для отыскания особых точек системы (3) приравниваем правые части этой системы к нулю. Получим систему:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{3p^2}{8}x + \frac{p^2}{8}y - 4x^3 - 2x^2y - 2xy^2 = 0,\\ &\frac{7p^2}{8}x - \frac{3p^2}{8}y - x^3 - 7x^2y - xy^2 + y^3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Решая систему (7), получаем особые точки системы (3) в конечной части плоскости:

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0; \tag{8}$$

$$x_{2,3} = \pm\frac{p}{4}, \quad y_{2,3} = \pm\frac{p}{4}; \tag{9}$$

$$x_{4,5} = \pm\frac{p}{8}, \quad y_{4,5} = \pm\frac{5p}{8}. \tag{10}$$

Заметим, что точки $(x_3,\,y_3)$ и $(x_5,\,y_5)$ лежат на кривой (6).

Исследуем найденные особые точки системы (3). Для этого выпишем, согласно [2], их характеристические числа:

МГПУ им. И.П.Шамякина

$$\lambda_1 = -\frac{p^2}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{p^2}{2}; \tag{8'}$$

$$\lambda_1 = -\frac{p^2}{2}, \ \lambda_2 = -p^2; \tag{9'}$$

$$\lambda_1 = \frac{27p^2}{8}, \ \lambda_2 = -\frac{15p^2}{4}. \tag{10'}$$

По характеристическим числам (8'), (9'), (10') заключаем, что особые точки (8) и (10) являются четырехсепаратрисными седлами, а точки (9) – узлами.

Найдем теперь особые точки системы (3) в бесконечной части плоскости и выясним их характер. К системе (3) применим последовательно преобразования Пуанкаре [3]:

$$x = \frac{1}{z}, \ y = \frac{u}{z} \quad \text{и} \quad x = \frac{v}{z}, \ y = \frac{1}{z} \tag{11}$$

и делаем замену времени $\frac{dt}{z^2} \to dt$.

Получим системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -1 - 3u + u^2 + \frac{7p^2}{8}z^2 + 3u^3 - \frac{3p^2}{4}uz^2 - \frac{p^2}{8}u^2z^2 \equiv \overline{P}(u, z), \\ \frac{dz}{dt} &= 4z + 2uz + 2u^2z - \frac{3p^2}{8}z^3 - \frac{p^2}{8}uz^3 \equiv \overline{Q}(u, z), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -3v - v^2 + \frac{p^2}{8}z^2 + 3v^3 + \frac{3p^2}{4}vz^2 + v^4 - \frac{7p^2}{8}v^2z^2 \equiv \overline{\overline{P}}(v, z), \\ \frac{dz}{dt} &= -z + vz + 7v^2z + \frac{3p^2}{8}z^3 + v^3z - \frac{7p^2}{8}vz^3 \equiv \overline{\overline{Q}}(v, z). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Полагая в правых частях системы (12) $z = 0$ и приравнивая их к нулю, получаем уравнение

$$3u^3 + u^2 - 3u - 1 = 0 \tag{14}$$

для определения особых точек $(u; 0)$ системы (12).

Решая уравнение (14), получим $u = \pm 1$ и $u = -\frac{1}{3}$.

Получаем особые точки

$$u_{1,2} = \pm 1, \quad z = 0; \tag{15}$$

$$u_3 = -\frac{1}{3}, \quad z = 0. \tag{16}$$

Полагая в правых частях системы (13) $v = z = 0$, видим, что «концы» оси Oy являются особой точкой системы (3). Характеристические числа для точек (15), (16) и «концов» оси Oy такие:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 8 \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 4; \tag{15'}$$

МГПУ им. И.П.Шамякина

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{32}{9}. \tag{16'}$$

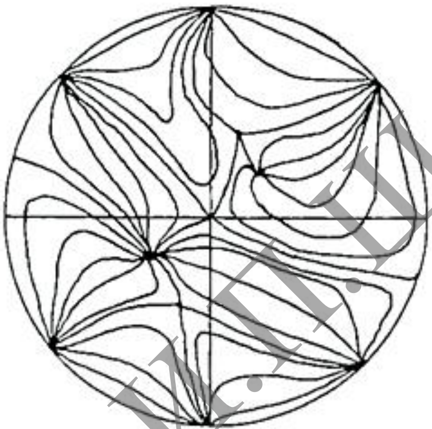
Для «концов» оси Oy $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$.

Отсюда следует, что точки (15) и «концы» оси Oy являются узлами, а точка (16) – четырехсепаратрисным седлом.

Замечаем, что система (3) в конечной и бесконечной частях плоскости имеет только простые особые точки.

Выводы

Найдены и исследованы особые точки системы (3) в конечной и бесконечной частях плоскости, и по результатам исследования построена возможная качественная картина поведения траекторий системы (3) в круге Пуанкаре:



Литература

1. Еругин, Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую / Н. П. Еругин // ПММ : в 16 т. – М., 1952. – Т. 16, вып. 6. – С. 659–670.
2. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М. : Наука, 1976. – 496 с.
3. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М. : Наука, 1981. – 568 с.

Summary

Character of special points of one differential system of the second order having multiple integral in the form of a breaking up algebraic curve of the third order is found out.

Поступила в редакцию 03.12.07.

МГПУ им. И.П.Шамякина