**Е. М. Овсиюк**

# ВЕКТОРНАЯ ЧАСТИЦА В ПРОСТРАНСТВЕ АНТИ ДЕ СИТТЕРА, СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В 5-МЕРНОМ ФОРМАЛИЗМЕ

**1. Введение. 5-мерная формулировка волнового уравнения.** Известно [1]–[15], что волновое уравнение для частицы со спином 1, помещенной в фон космологической модели де Ситтера, может быть представлено в 5-мерном виде, явно инвариантном относительно группы симметрии этого пространства – группы $S0(3.2)$. Цель настоящей работы – воспользовавшись этим представлением, построить решения волнового уравнения для частицы со спином 1. Особый интерес представляют статические координаты. Из общих соображений понятно, что должен возникать дискретный спектр энергий и иметь место некоторое вырождение уровней по квантовым числам.

В конформно-плоских координатах пространства анти де Ситтера

$$dS^2 = \frac{1}{\Phi^2}[\,(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2\,], \qquad \Phi = (1+x^2)/2 \qquad (1)$$

рассмотрим тензорные уравнения Прока

$$\partial_\alpha \Psi_\beta - \partial_\beta \Psi_\alpha = m\,\Psi_{\alpha\beta}, \qquad \Phi^2\,\partial^\beta \Psi_{\alpha\beta} = m\Psi_\alpha\,. \qquad (2)$$

Введем в пространстве анти де Ситтера пять координат $\xi^a$:

$$\xi^\alpha = \frac{x^\alpha}{\Phi}, \qquad \xi^5 = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \qquad x^\alpha = \frac{\xi^\alpha}{1+\xi^5}, \qquad \Phi = \frac{1}{1+\xi^5}, \qquad (a = \alpha, 5),$$

$$(\xi^0)^2-(\xi^1)^2-(\xi^2)^2-(\xi^3)^2+(\xi^5)^2 = +1, \qquad dS^2 = \eta_{\alpha\beta}\,d\xi^\alpha d\xi^\beta + (d\xi^5)^2\,. \ (3)$$

Из приведенных соотношений следует, что пространство анти де Ситтера можно отождествить со сферой в 5-мерном псевдоевклидовом пространстве; следовательно, пространство анти де Ситтера допускает 10-параметрическую группу движений – группу $SO(3.2)$. Вместо $\Psi^\alpha(x)$ (обозначаем ее дальше как $a^\alpha(x)$) введем волновую функцию $A^a(\xi)$:

$$A^\alpha = (\frac{\delta^\alpha_\beta}{\Phi} - \frac{x^\alpha\, x_\beta}{\Phi^2})\,a^\beta, \quad A^5 = -\frac{x_\beta\, a^\beta}{\Phi^2}\;; \qquad a^\alpha(x) = \Phi\,(A^\alpha - x^\alpha A^5)\,. \ (4)$$

Пять величин $A^a(\xi)$ не являются независимыми; легко можно убедиться, что выполняется условие поперечности: $A^a\xi_a = A^0\xi^0 - \vec{A}\,\vec{\xi} + A^5\xi^5 = 0$. Инвариантное относительно группы $SO(3.2)$ волновое уравнение для вектора $A^a(\xi)$ должно строиться с помощью оператора $L_{ab} = \xi_a\,(\partial/\partial\xi^b) - \xi_b\,(\partial/\partial\xi^a)$ и иметь вид

$$(-\frac{1}{2}L^{ab}\,L_{ab} + m^2 - 2\,)\,A_c = 0, \qquad L_{ab}A^b = A_a\,, \qquad A^a\xi_a\,. \tag{5}$$

**2. Сферические волны в 5-мерном представлении, разделение переменных в статических координатах.** Уравнение для векторного поля в 5-мерной форме

$$(\,\Delta + m^2 - 2\,)\,A^b = 0\,,\quad \xi_b\,A^b = 0\,,\quad L_{ab}A^b = A_a \tag{6}$$

будем решать в статических координатах анти де Ситтера (при этом следуем методу, развитому для решения аналогичной задачи в пространстве де Ситтера [15]); эти координаты $x^\alpha = (t,\, r,\, \theta,\, \phi)$ связаны с $\xi^a$ соотношениями:

$$\xi^1 = r\sin\theta\cos\phi\,,\quad \xi^2 = r\sin\theta\sin\phi,\quad \xi^3 = r\cos\theta\,,$$
$$\xi^0 = \sin t\sqrt{1+r^2}\,,\quad \xi^5 = \cos t\sqrt{1+r^2}\,;$$
$$t = \operatorname{arctg}\frac{\xi^0}{\xi^5}\,,\quad r = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2}\,,$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}}{\xi^3}\,, \phi = \operatorname{arctg}\frac{\xi^2}{\xi^1}\,. \tag{7}$$

Для любого представления группы $SO(3.2)$, реализуемого в пространстве функций $\Psi(\xi)$, выполняются соотношения:

$$\xi' = S\,\xi\,,\ \Psi'(\xi') = U\,\Psi(\xi) \qquad \Rightarrow \qquad \Psi'(\xi) = U\,\Psi(S^{-1}\,\xi)\,.$$

Дальше рассматриваем случай, когда $U \equiv S$ и $\Psi \equiv A$. Полагая

$$\xi^{0'} = \cos\omega\,\xi^0 - \sin\omega\,\xi^5\,, \qquad \xi^{5'} = \sin\omega\,\xi^0 + \cos\omega\,\xi^5$$

(это поворот на угол $\omega$ в плоскости 0–5) и выбирая параметр $\omega$ бесконечно малым, получим

$$A'(\xi) = (I + \delta\omega\,J_{50})\,A(\xi)\,, \qquad J_{50} = L_{50} + \sigma_{50}\,,$$

$$L_{50} = \xi_5\,\frac{\partial}{\partial\xi^0} - \xi^0\,\frac{\partial}{\partial\xi^5}\,, \qquad \sigma_{50} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Генератор $J_{50}$ будет использован при построении оператора энергии векторной частицы в 5-мерном представлении. Волновое уравнение будем решать, диагонализируя одновременно три оператора: $(+iJ_{50})$ – энергии; $\vec{J}^{\,2}$ – квадрата момента; $J_3$ – третьей проекции момента:

$$(+iJ_{50})^a_{\ b} A^b = \varepsilon A^a ,$$
$$(\vec{J}^{\,2})^a_{\ b} A^b = j(j+1)\, A^a , \qquad (J_3)^a_{\ b}\, A^b = m\, A^a . \tag{9}$$

Подстановка для 5-вектора, учитывающая зависимость функции $A_a$ от времени, вытекающую из уравнения $(+iJ_{50})\, A = \varepsilon A$, имеет вид

$$\vec{A} = e^{-i\varepsilon t} \Big[\; f(r)\, \vec{Y}^{j+1}_{jm}(\theta,\phi) + g(r)\, \vec{Y}^{j-1}_{jm}(\theta,\phi) + h(r)\, \vec{Y}^{j}_{jm}(\theta,\phi) \;\Big],$$
$$A^0 = \Big[\; e^{-i(\varepsilon-1)t}\; F(r) + i\, e^{-i(\varepsilon+1)t}\; G(r) \;\Big] Y_{jm}(\theta,\phi),$$
$$A^5 = \Big[\; i\, e^{-i(\varepsilon-1)t}\; F(r) + e^{-i(\varepsilon+1)t})\, G(r) \;\Big] Y_{jm}(\theta,\phi) . \tag{10}$$

При заданном $j = 1,\ 2,\ ...$ имеются три линейно независимых сферических вектора с $\nu = j+1,\ j,\ j-1$, при нулевом $j=0$ есть только один сферический вектор. Это означает, что при нулевом $j=0$ подстановка для 5-мерной функции может быть только следующей:

$$j = 0 , \qquad \vec{A} = e^{-i\varepsilon t}\, f(r)\, \vec{Y}^{1}_{00} ,$$
$$\frac{1}{2}(A^0 + iA^5) = iG(r)\, e^{-i(\varepsilon+1)t}\, Y_{jm} ,$$
$$\frac{1}{2}(A^0 - iA^5) = F(r)\, e^{-i(\varepsilon-1)t}\, Y_{jm} . \tag{11}$$

Радиальные функции $f(r),\ g(r),\ h(r),\ F(r),\ G(r)$ должны быть определены из уравнения (6). Обратимся к первому уравнению из (6). Учитывая, что действие оператора $\vec{l}^{\,2}$ на сферические функции определяется формулами

$$\vec{l}^{\,2}\, \vec{Y}^{\nu}_{jm} = \nu(\nu+1)\, \vec{Y}^{\nu}_{jm} , \quad \vec{l}^{\,2}\, Y_{jm} = j(j+1)\, Y_{jm} , \quad \nu = j, j+1, j-1 ,$$

для радиальных функций $f(r),\ g(r),\ h(r),\ F(r)$ получаем дифференциальное уравнение одного и того же вида:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2(1+2r^2)}{r(1+r^2)} \frac{d}{dr} + \frac{\Lambda^2}{(1+r^2)^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2(1+r^2)} - \frac{(m^2-2)}{1+r^2} \right] U_{\Lambda,\nu} = 0 ; \tag{12}$$

искомые функции должны совпадать со следующими решениями этого уравнения

$$f = f_0\, U_{\varepsilon,j+1}\,, \quad g = g_0\, U_{\varepsilon,j-1}\,, \quad h = h_0\, U_{\varepsilon,j}\,, \quad F = F_0\, U_{\varepsilon-1,j}\,, \quad G = G_0\, U_{\varepsilon+1,j}\,;$$

$f_0,\ g_0,\ h_0,\ F_0,\ G_0$ – некоторые постоянные; связь между ними должна быть найдена из анализа уравнений (6). Решения уравнения (12) могут быть выражены через гипергеометрические функции (достаточно детально рассмотреть случай $U_{\varepsilon,j}$):

$$U_{\varepsilon,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-\varepsilon/2}\, F(\alpha,\beta,\gamma;z)\,, \quad z = -r^2,\ \gamma = j+3/2\,,$$

$$\alpha = \frac{3/2 + j - \varepsilon + \sqrt{m^2+1/4}}{2}\,, \qquad \beta = \frac{3/2 + j - \varepsilon - \sqrt{m^2+1/4}}{2}\,; \quad (13)$$

гипергеометрический ряд оборвем до полинома, наложив условие $\alpha = -n\,,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ ; в результате приходим к следующему правилу квантования энергии:

$$\varepsilon = N + 3/2 + \sqrt{m^2+1/4}\,, \quad N = 2n + j \in \{0,1,2,\ldots\}\,. \qquad (14)$$

Легко можно убедиться, что при $z \to -\infty$ полная радиальная функция $U(z)$ стремится к нулю:

$$U(z \to -\infty) \sim z^{j/2}\, z^{-\varepsilon/2}\, z^{n} \sim z^{-3/4-\sqrt{m^2+1/4}\,/2} \to 0\,.$$

Из условий поперечности и Лоренца в (6) можно получить следующие выражения для $G \pm iF$ через $(f,\ g)$:

$$G + iF = \frac{-rf + rg}{\sqrt{1+r^2}}\,, \; G - iF = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1+r^2}\left[\, \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right) f - \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right) g \,\right]. \quad (15)$$

**3. Решение радиальных уравнений, волны типов** $(j,\ j+1,\ j-1)$**.** Три линейно независимые решения волнового уравнения будем искать в следующем виде:

$$\begin{array}{ll} j-\text{волна}, & f = 0\,,\ g = 0\,,\ h \neq 0\,, \\ (j+1)-\text{волна}, & f \neq 0\,,\ g = 0\,,\ h = 0\,, \\ (j-1)-\text{волна}, & f = 0\,,\ g \neq 0\,,\ h = 0\,. \end{array}$$

Строя волны этих трех типов, мы фактически требуем диагонализации на решениях дополнительного оператора – квадрата орбитального момента $\vec{l}^{\,2} = \nu(\nu+1)$, $\nu = j+1,\ j,\ j-1$.

Рассмотрим волну $(j+1)$-типа:

$$f = \sqrt{\frac{2j+1}{j+1}}\, f_0\, U_{\varepsilon,j+1}\,, \qquad F = F_0\, U_{\varepsilon-1,j}\,, \qquad G = G_0\, U_{\varepsilon+1,j}\,; \qquad (16)$$

условия (15) принимают вид

$$G + iF = -\frac{rf(r)}{\sqrt{1+r^2}}, \qquad G - iF = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1+r^2}\,\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right) f \tag{17}$$

или после перехода к переменной $z = -r^2$

$$\begin{aligned} 2\frac{G_0}{f_0} U_{\varepsilon+1,j} &= -\frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}} U_{\varepsilon,j+1} + \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-z}\,\left(-2\sqrt{-z}\frac{d}{dz} + \frac{j+2}{\sqrt{-z}}\right) U_{\varepsilon,j+1}, \\ 2i\frac{F_0}{f_0} U_{\varepsilon-1,j} &= -\frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}} U_{\varepsilon,j+1} - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-z}\,\left(-2\sqrt{-z}\frac{d}{dz} + \frac{j+2}{\sqrt{-z}}\right) U_{\varepsilon,j+1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Учитывая явный вид функций

$$\begin{gathered} U_{\varepsilon,j+1} = (-z)^{(j+1)/2}\,(1-z)^{-\varepsilon/2}\,F(\alpha,\beta,\gamma;z), \\ U_{\varepsilon+1,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon+1)/2}\,F(\alpha-1,\beta-1,\gamma-1;z), \\ U_{\varepsilon-1,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon-1)/2}\,F(\alpha,\beta,\gamma-1;z), \\ \gamma = j+1+3/2, \ \alpha = \frac{3/2+j+1-\varepsilon+\sqrt{m^2+1/4}}{2}, \\ \beta = \frac{3/2+j+1-\varepsilon-\sqrt{m^2+1/4}}{2}, \end{gathered} \tag{19}$$

а также используя формулы дифференцирования и соотношения Гаусса для гипергеометрических функций, найдем коэффициенты $G_0$, $F_0$:

$$G_0 = \frac{\gamma-1}{\varepsilon} f_0 = \frac{j+3/2}{\varepsilon} f_0, \qquad F_0 = i\frac{j+3/2}{\varepsilon} f_0 = i\frac{1-\gamma}{\alpha+\beta-\gamma} f_0. \tag{20}$$

Аналогичные вычисления можно проделать и для волны типа $(j-1)$:

$$g = \sqrt{\frac{2j+1}{j}}\, g_0\, U_{\varepsilon,j-1}(z), \qquad F = F_0\, U_{\varepsilon-1,j}, \qquad G = G_0\, U_{\varepsilon+1,j},$$

$$G + iF = \frac{r\,g}{\sqrt{1+r^2}}, \qquad G - iF = -\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1+r^2}\,\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right) g; \tag{21}$$

переходим к переменной $z = -r^2$

$$\begin{aligned} 2\frac{G_0}{g_0} U_{\varepsilon+1,j} &= \frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}} U_{\varepsilon,j-1} - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-z}\,\left(-2\sqrt{-z}\frac{d}{dz} - \frac{j-1}{\sqrt{-z}}\right) U_{\varepsilon,j-1}, \\ 2i\frac{F_0}{g_0} U_{\varepsilon-1,j} &= \frac{\sqrt{-z}}{\sqrt{1-z}} U_{\varepsilon,j-1} + \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-z}\,\left(-2\sqrt{-z}\frac{d}{dz} - \frac{j-1}{\sqrt{-z}}\right) U_{\varepsilon,j-1}, \end{aligned} \tag{22}$$

учитываем явный вид функций

$$U_{\varepsilon,j-1} = (-z)^{(j-1)/2}\,(1-z)^{-\varepsilon/2}\,F(a,b,c;z)\,,$$

$$U_{\varepsilon+1,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon+1)/2}\,F(a,b,c+1;z)\,,$$

$$U_{\varepsilon-1,j} = (-z)^{j/2}\,(1-z)^{-(\varepsilon-1)/2}\,F(a+1,b+1,c+1;z)\,,$$

$$c = j-1+3/2\,,\quad a = \frac{3/2+j-1-\varepsilon+\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,,$$

$$b = \frac{3/2+j-1-\varepsilon-\sqrt{m^2+1/4}}{2}\,. \qquad (23)$$

Используя свойства гипергеометрических функций, находим коэффициенты

$$G_0 = \frac{(a-c)(b-c)}{\varepsilon\, c}\,g_0\,, \qquad F_0 = i\,\frac{ab}{\varepsilon\, c}\,g_0\,. \qquad (24)$$

Соберем вместе полученные результаты для решений 5-мерного уравнения:

$j$ **-волна** $\quad j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\vec{A} = e^{-i\varepsilon t} h_0\, U_{-i\varepsilon,j}(r)\,\vec{Y}^{\,j}_{jm}(\theta,\phi)\,,\quad A^0 = 0\,,\ A^5 = 0\,;$$

условие квантования $\varepsilon = 2n + j + 3/2 + \sqrt{m^2+1/4}$.

$(j-1)$ **-волна** $\quad j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\vec{A} = e^{-i\varepsilon t}\sqrt{\frac{2j+1}{j}}\,f(r)\,\vec{J}^{\,j-1}_{jm}(\theta,\phi)\,,\qquad f(r) = f_0\,U_{\varepsilon,j-1}\,,$$

$$\frac{1}{2}(A^0+iA^5) = i\,G(r)\,e^{-i(\varepsilon+1)t}\,Y_{jm}\,,\quad G(r) = \frac{(a-c)(b-c)}{\varepsilon\, c}\,g_0\,U_{\varepsilon+1,j}\,,$$

$$\frac{1}{2}(A^0-iA^5) = F(r)\,e^{-i(\varepsilon-1)t}\,Y_{jm}\,,\qquad F(r) = i\,\frac{ab}{\varepsilon\, c}\,g_0\,U_{\varepsilon-1,j}\,,$$

условие квантования $\varepsilon = 2n + j - 1 + 3/2 + \sqrt{m^2+1/4}$.

$(j+1)$ **-волна**, $\quad j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\vec{A} = e^{-i\varepsilon t}\sqrt{\frac{2j+1}{j+1}}\,f(r)\,\vec{J}^{\,j+1}_{jm}(\theta,\phi)\,,\qquad f(r) = f_0\,U_{\varepsilon,j+1}\,,$$

$$\frac{1}{2}(A^0+iA^5) = i\,G(r)\,e^{-i(\varepsilon+1)t}\,Y_{jm}\,,\qquad G(r) = \frac{j+3/2}{\varepsilon}\,f_0\,U_{\varepsilon+1,j}\,,$$

$$\frac{1}{2}(A^0 - iA^5)\quad F(r)\,e^{-i(\varepsilon-1)t} = Y_{jm}\,, \qquad\qquad F(r) \quad i = \frac{j+3/2}{\varepsilon}\, f_0\, U_{\varepsilon-1,j}\,,$$

условие квантования $\varepsilon = 2n + j + 1 + 3/2 + \sqrt{m^2 + 1/4}$ .

Вырождение уровней энергии можно описать следующей таблицей

| | $j$ | $(j-1)$ | $(j+1)$ |
|---|---|---|---|
| $N=1$ | $n=0,\ j=1$ | $n=0,\ j=2$ | $n=0,\ j=0$ |
| $N=2$ | $n=0,\ j=2$ | $n=0,\ j=3$ | $n=0,\ j=1$ |
| | | $n=0,\ j=1$ | |
| $N=3$ | $n=0,\ j=3$ | $n=0,\ j=4$ | $n=0,\ j=2$ |
| | $n=1,\ j=1$ | $n=1,\ j=2$ | $n=1,\ j=0$ |
| $N=4$ | $n=0,\ j=4$ | $n=0,\ j=5$ | $n=0,\ j=3$ |
| | $n=1,\ j=2$ | $n=1,\ j=3$ | $n=1,\ j=1$ |
| $N=5$ | $n=0,\ j=5$ | $n=0,\ j=6$ | $n=0,\ j=4$ |
| | $n=1,\ j=3$ | $n=1,\ j=4$ | $n=1,\ j=2$ |
| | $n=2,\ j=1$ | $n=2,\ j=2$ | $n=2,\ j=0$ |
| $N=6$ | $n=0,\ j=6$ | $n=0,\ j=7$ | $n=0,\ j=5$ |
| | $n=1,\ j=4$ | $n=1,\ j=5$ | $n=1,\ j=3$ |
| | $n=2,\ j=2$ | $n=2,\ j=3$ | $n=2,\ j=1$ |
| | | $n=3,\ j=1$ | |
| $N=7$ | $n=0,\ j=7$ | $n=0,\ j=8$ | $n=0,\ j=6$ |
| | $n=1,\ j=5$ | $n=1,\ j=6$ | $n=1,\ j=4$ |
| | $n=2,\ j=3$ | $n=2,\ j=4$ | $n=2,\ j=2$ |
| | $n=3,\ j=1$ | $n=3,\ j=2$ | $n=3,\ j=0$ |
| $N=8$ | $n=0,\ j=8$ | $n=0,\ j=9$ | $n=0,\ j=7$ |
| | $n=1,\ j=6$ | $n=1,\ j=7$ | $n=1,\ j=5$ |
| | $n=2,\ j=4$ | $n=2,\ j=5$ | $n=2,\ j=3$ |
| | $n=3,\ j=2$ | $n=3,\ j=3$ | $n=3,\ j=1$ |
| | | $n=4,\ j=1$ | |

Уровни энергии задаются соотношениями (при $j=0$, $\nu = j+1=1$)

$$\varepsilon = N + \frac{3}{2} + \sqrt{m^2+1/4}\,, \quad N = 2n+\nu\,,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ \nu = j,\ j-1,\ j+1\,. \qquad (25)$$

**Заключение.** Уравнение для частицы со спином 1 в 5-мерной форме, явно инвариантной относительно группы $SO(3.2)$, решено в статических координатах пространства анти де Ситтера. На построенных решениях диагонализируются 5-мерные операторы энергии, квадрата и третьей проекции полного момента векторной частицы. Найдено три линейно независимых решения $(j, j+1, j-1)$ типов. Найден дискретный спектр энергии векторной частицы, описано вырождение уровней.

Автор благодарит В.М. Редькова за советы и помощь в работе.

**Литература**

1. Dirac, P.A.M. The electron wave equation in the de Sitter space / P.A.M. Dirac // Ann. Math. – 1935. – Vol. 36, № 3. – P. 657–669.

2. Dirac, P.A.M. Wave equations in conformal space / P.A.M. Dirac // Ann. Math. – 1936. – Vol. 37. – P. 429.

3. Lubanski, J.K. Sur la representation des champs mesoniques dans l’éspace à sinq dimension / J.K. Lubanski, L. Rosenfeld // Physica. – 1942. – Vol. 9. – P. 117.

4. Goto, K. Wave equations in de Sitter space / K. Goto // Progr. Theor. Phys. – 1951. – Vol. 6. – P. 1013.

5. Ikeda, M. On a five-dimensional representation of the electromagnetic and electron field equations in a curved space-time / M. Ikeda // Progr. Theor. Phys. – 1953. – Vol. 10. – P. 483.

6. Пестов, Ф.Б. Уравнения электродинамики в сферическом мире / Ф.Б. Пестов, Н.А. Черников, Н.С. Шавохина // ТМФ. – 1975. – Т. 25, № 3. – С. 327–334.

7. Fushchych, W.L. On representations of the inhomogeneous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkowski space / W.L. Fushchych, I.Yu. Krivsky // Nucl. Phys. B. – 1969. – Vol. 14. – P. 573–585.

8. Castagnino, M. Champs de spin entier dans l’espace-temps De Sitter / M. Castagnino // Ann. Inst. Henri Poincaré. A. – 1970. – Vol. 13, № 3. – P. 263–270.

9. Vidal, A. On the consistency of wave equations in de Sitter space / A. Vidal // Notas Fis. – 1970. – Vol. 16, № 1. – P. 8.

10. Adler, S.L. Massless, euclidean quantum electrodinamics on the 5-dimensional unit hypersphere / S.L. Adler // Phys. Rev. D. – 1972. – Vol. 6, № 12. – P. 3445–3461.

11. Gazeau, J.P. Gauge fixing and Gupta-Bleuler triplet in de Sitter QED / J.P. Gazeau // J. Math. Phys. – 1985. – Vol. 26, № 7. – P. 1847–1854.

12. Sánchez, N. Quantum field theory and elliptic interpretation of de Sitter space-time / N. Sánchez // Nucl. Phys. B. – 1987. – Vol. 294, № 4. – P. 1111–1137.

13. Pol’shin, S. Group theoretical examination of the relativistic wave equations on curved spaces. II. De Sitter and anti de Sitter spaces / S. Pol’shin // e-Print archive [Electronic resource]. – Mode of access: gr-qc/9803092.

14. Garidi, T. Massless vector field in de Sitter universe / T. Garidi [et al.] // e-Print archive [Electronic resource]. – Mode of access: arXiv:gr-qc/0608004.

15. Отчик, В.С. Сферические волны электрического, магнитного и продольного типов в пространстве де Ситтера / В.С. Отчик, В.М. Редьков; Ин-т физики АН БССР. – Минск, 1986. – 44 с. – Деп. в ВИНИТИ 16.12.86, № 8641–В86.