**Н. В. Гуцко**

# ПРИЗНАКИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ГРУПП НАСЫЩЕННОЙ ФОРМАЦИИ ПО СВОЙСТВАМ ИХ $Q$-ВЛОЖЕННЫХ ПОДГРУПП

Строение конечной группы тесно связано с условиями, налагаемыми на максимальные подгруппы силовских подгрупп самой группы или силовских подгрупп некоторых выделенных подгрупп этой группы. Впервые это было замечено в работе Хупперта [1], где, в частности, было доказано, что разрешимая группа $G$ является сверхразрешимой, если все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из $G$ перестановочны со всеми членами некоторой силовской системы группы $G$. Несколько позднее Сринивазан доказал [2], что группа $G$ является сверхразрешимой при условии, что в $G$ имеется такая нормальная подгруппа $N$ со сверхразрешимой факторгруппой $G/N$, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из $N$ нормальны в $G$. Эти два результата получили развитие в исследованиях многих авторов (см. в частности, [3–7]). В настоящей работе изучается строение конечных групп в данном направлении на основе вводимого ниже понятия $Q$-вложенной подгруппы.

В работе [8] Оре рассмотрел два обобщения нормальности, оба из которых вызывают неослабевающий интерес у исследователей и в наши дни. В работе [8] были впервые введены в математическую практику квазинормальные (или перестановочные, согласно [9]) подгруппы. Оказалось, что квазинормальные подгруппы обладают рядом интересных свойств [8–15] и что фактически они мало отличаются от нормальных подгрупп. Отметим, в частности, что согласно [14], для любой квазинормальной подгруппы $H$ имеет место $H^G/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$, а согласно [16, глава 2, теорема 2.1.3], квазинормальные подгруппы – это в точности те субнормальные подгруппы группы $G$, которые являются модулярными элементами в решетке всех подгрупп группы $G$.

Подгруппы, перестановочные с силовскими подгруппами, впервые изучались в работе С.А. Чунихина [17] (см. также монографию [18]). Позднее подгруппы такого типа были названы в работе Кегеля [19] $\pi$-квазинормальными.

Отметим следующее свойство $s$-перестановочных подгруппы, которое существенно отличает их от перестановочных подгрупп: *$s$-перестановочные подгруппы конечной группы $G$ образуют подрешетку решетки $L(G)$ всех подгрупп из группы $G$*. Понятно, что если подгруппа $H$ группы $G$ нормальна в $G$, то в $G$ всегда найдется такая подгруппа $T$, что выполнено следующее условие:

$G=HT$ и обе подгруппы $T$ и $T\cap H$ нормальны в $G$. (*)

Таким образом, условие (*) является еще одним обобщением нормальности. Такая идея была впервые рассмотрена в работе [8], где, в частности, было доказано, что: *группа $G$ является разрешимой тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы удовлетворяют условию* (*) (в связи с этим см. также работу Бэра [20]). В дальнейшем, в работе [21] подгруппы, удовлетворяющие условию (*) были названы $c$-нормальными. В этой же работе была построена теория $c$-нормальных подгрупп и даны некоторые ее приложения в вопросах классификации групп с заданными системами подгрупп.

Таким образом, проанализировав условия $s$-перестановочнсти и $c$-нормальности для подгрупп, мы, следуя идее Оре, введем следующее понятие.

**Определение 2** [22, 23]. *Пусть $H$ – подгруппа группы $G$. Тогда мы говорим, что $H$ $Q$-вложенная в $G$ подгруппа, если существует такая перестановочная подгруппа $T$ группы $G$, что $HT=G$ и $T\cap H\leq H_{sG}$.*

Рассмотрим следующие примеры, показывающие, что условие $Q$-вложенности обобщает условия $s$-перестановочности и $c$-нормальности.

**Пример 3.** *Пусть $H$ – $s$-перестановочная подгруппа группы $G$. Тогда $H_{sG}=H$ и мы имеем $G=HG$ и $G\cap H=H\leq H_{sG}$.*

**Пример 4.** *Если H – c-нормальная подгруппа в G и T такая нормальна в G подгруппа, что* $G=TH$ *и* $T\cap H\leq H_G$, *то* $H_G\leq H_{sG}$ *и H является Q-вложенной подгруппой группы G.*

Следующий простой пример показывает, что в общем случае множество $Q$-вложенных подгрупп шире множества всех $s$-перестановочных подгрупп и множества всех $c$-нормальных подгрупп.

**Пример 5.** *Пусть* $P=M_{\mathrm{m}}(2)=< x,\ y|\ x^{2^{m-1}}=y^2=1,\ x^y=x^{1+2^{m-2}}>$, *где m > 3. И пусть* $A=<x>$, $B=<y>$. *Тогда* $P=[A]B$ *и* $|B|=2$. *Ввиду* [24, с. 191], *Z(P) – циклическая группа порядка* $2^{m-2}$. *Ясно, что B – нормальная подгруппа в* $Z(P)B$. *Пусть* $Z_3$ *– группа простого порядка 3 и* $G=Z_3\cong P=[K]P$, *где K – база регулярного сплетения G. Тогда подгруппа A является Q-вложенной в G, но не s-перестановочной и не c-нормальной в группе G.*

Приведем основные свойства $Q$-вложенных подгрупп, а также необходимые результаты, которые используются в работе неоднократно.

**Лемма 6** [25, с. 35]. *Класс всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией.*

**Лемма 7.** *Пусть G – группа и* $A\leq G$. *Тогда*

(*1*) *Если A субнормальна в G и A –* $\pi$*-подгруппа группы G, то* $A\leq O_\pi(G)$ [26].

(*2*) *Если A s-перестановочна в G, то A субнормальна в G* [19].

(*3*) Предположим, что $A$ – нормальная подгруппа в $G$. Тогда $K/A$ субнормальна в $G/A$ тогда и только тогда, когда $K$ субнормальна в $G$ [9, A, Lemma 14.1].

(*4*) *Если A и B являются подгруппами группы G, то* $<A,\ B>$ *– субнормальная подгруппа в G* [9, A, Lemma 14.4].

(*5*) *Пусть G – группа и* $H\leq G$. *Тогда если H перестановочна в G, то H субнормальна в G* [8].

**Лемма 8** [15]. *Пусть H – p-группа для некоторого простого p. Тогда H – s-перестановочная подгруппа в G тогда и только тогда, когда* $O^p(G)\leq N_G(H)$.

**Лемма 9** [27]. *Пусть G – группа с нормальной подгруппой N такой, что G = QN, для некоторой подгруппы Q в G. Если M – максимальная подгруппа группы G такая, что* $N\leq M$, *то* $M\cap Q$ *– максимальная подгруппа в Q.*

**Лемма 10** [22]. *Пусть G – группа и* $H\leq K\leq G$. *Тогда*

(*1*) *Предположим, что H нормальная в G. Тогда* $K/H$ *Q-вложена в G/H тогда и только тогда, когда K Q-вложена в G.*

(2) *Если H Q-вложена в G, то H Q-вложена в K.*

(3) *Предположим, что H нормальна в G. Тогда подгруппа* $HE/H$ *Q-вложена в G/H для каждой Q-вложенной в G подгруппы E такой, что* $(|H|,\ |E|)=1$.

(4) *Если H является s-перестановочной подгруппой в G, то H Q-вложена в G.*

(5) *Пусть H – p-подгруппа, для некоторого простого p. Предположим, что H Q-вложена, но не s-перестановочна в G. Тогда в G имеется такая нормальная подгруппа M, что* $|G:M|=p$ *и* $G=HM$.

***Доказательство.***

(1) ***Необходимость.*** Предположим, прежде всего, что $K/H$ является $Q$-вложенной подгруппой в $G/H$ и пусть $T/H$ – перестановочная подгруппа в $G/H$ такая, что

$$(K/H)(T/H)=G/H \text{ и } (T/H)\cap(K/H)\leq(K/H)_{s(G/H)}.$$

По лемме 7(2), $T/H$ субнормальна в $G/H$. А по лемме 7(3), подгруппа $T$ субнормальна в $G$. С другой стороны, мы имеем $KT=G$ и $T\cap K\leq K_{sG}$ [28]. Следовательно, $K$ $Q$-вложена в $G$.

***Достаточность.*** Теперь предположим, что для некоторой перестановочной подгруппы $T$ из $G$ мы имеем $KT=G$ и $T\cap K\leq K_{sG}$. Тогда по лемме 7(4), $HT$ является субнормальной подгруппой в $G$, поэтому по лемме 7(3), $HT/H$ субнормальна в $G/H$. С другой стороны, $(HT/H)(K/H)=G/H$ и

$$(HT/H)\cap(K/H)=(HT\cap K)/H=$$
$$=H(T\cap K)/H\leq HK_{sG}/H=K_{sG}/H=(K/H)_{s(G/H)}.$$

Таким образом, $K/H$ $Q$-вложена в $G/H$.

(2) Пусть $T$ – перестановочная подгруппа в $G$ такая, что $HT=G$ и $T\cap H \leq H_{sG}$. Тогда $K=K\cap HT=H(K\cap T)$ и $K\cap T$ перестановочна в $K$. Тогда мы видим, что $(K\cap T)\cap H \leq H_{sG} \leq H_{sK}$ [28]. Следовательно, подгруппа $H$ $Q$-вложена в $K$.

(3) Предположим, что $E$ $Q$-вложена в $G$ и пусть $T$ – перестановочная подгруппа в $G$ такая, что $ET=G$ и $T \cap E \leq E_{sG}$. Очевидно, $H \leq T$, значит $T\cap HE = H(T\cap E) \leq H(E_{sG}) \leq (HE)_{sG}$. Следовательно, $HE$ $Q$-вложена в $G$. Согласно (2), $HE/H$ $Q$-вложена в $G/H$.

(4) Пусть $H$ – $s$-перестановочная подгруппа группы $G$. Тогда $H_{sG}=H$ и мы имеем $G = HG$ и $G\cap H=H \leq H_{sG}$. Итак, подгруппа $H$ $Q$-вложена в $G$.

(5) Согласно условию, в группе $G$ имеется подгруппа $T$ такая, что $HT=G$ и $T\cap H\leq H_{sG}$. По лемме 7(5) подгруппа $T$ субнормальна в $G$ и поэтому $T\leq K$, где $K$ – некоторая собственная нормальная подгруппа группы $G$. Значит, $G/K$ – $p$-группа и поэтому в $G$ имеется нормальная максимальная подгруппа $M$ такая, что $HM=G$. Лемма доказана.

На основе введенного понятия $Q$-вложенной подгруппы нами изучено влияние $Q$-вложенности некоторых силовских и максимальных подгрупп на строение группы. Прежде всего докажем следующую лемму.

**Лемма 11.** *Пусть $p$ – наименьший простой делитель порядка группы $G$ и $G_p$ – силовская $p$-подгруппа в $G$. Если подгруппы из $G_p$ с порядком $p$ или порядком 4 являются $Q$-вложенными в $G$, то $G$ – $p$-нильпотентная группа.*

***Доказательство.*** Предположим, что лемма не верна и пусть $G$ – контрпример минимального порядка.

Пусть все подгруппы из $G_p$ с порядком $p$ или порядком 4, если $p = 2$, являются $s$-перестановочными в $G$. Так как $G$ не является $p$-нильпотентной группой, то согласно [24, глава IV, теорема 5.4] $G$ содержит $p$-замкнутую подгруппу Шмидта $H=[H_p]H_q$. Ввиду условия теоремы, $H$ имеет экспоненту $p$ или экспоненту 4, если $p = 2$. Значит, согласно [28, лемма 2.12] имеет место $|H_p/\Phi(H_p)|=p$, что невозможно, поскольку $p$ – наименьший простой делитель порядка группы $G$.

Значит, существует подгруппа $L$ в $G_p$ простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, не являющаяся $s$-перестановочной в $G$. Тогда по лемме 10(5), существует максимальная нормальная подгруппа $M$ в $G$ такая, что $G = LM$ и $|G:M|=p$. Так как $M$ является нормальной подгруппой в $G$, то $M_p=G_p\cap M$ – силовская $p$-подгруппа в $M$. По лемме 10(2) каждая подгруппа простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, из $M_p$ $Q$-вложена в $M$. Итак, условие теоремы наследуется подгруппой $M$ и $|M|<|G|$. Поэтому $M$ – $p$-нильпотентная группа. Тогда $M=[M_{p'}]M_p$. Так как $M_{p'}$ является характеристической подгруппой в $M$, которая нормальна в $G$ и, очевидно, $M_{p'}=G_{p'}$ – холловская $p'$-подгруппа в $G$, то $G$ – $p$-нильпотентная группа. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

**Теорема 12.** *Пусть $p$ – простое число, $G$ – $p$-разрешимая группа и $H$ – нормальная подгруппа группы $G$ такая, что $G/H$ принадлежит классу всех $p$-сверхразрешимых групп. Если каждая максимальная подгруппа силовской подгруппы из $H$ $Q$-вложена в $G$, то $G$ принадлежит классу всех $p$-сверхразрешимых групп.*

***Доказательство.*** Предположим, что теорема не верна и пусть $G$ – контрпример минимального порядка. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Если $N$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $H$, то $G/N$ принадлежит классу всех $p$-сверхразрешимых групп.*

Действительно, $(G/N)/(H/N)\cong G/H\in \mathfrak{A}_p$. Пусть $H^*/N$ – силовская $p$-подгруппа в $H/N$ и $M/N$ – произвольная максимальная в $H^*/N$

подгруппа. Покажем, что подгруппа $M/N$ $Q$-вложена в $G/N$. Если $H_p$ – силовская $p$-подгруппа в $H^*$, то $H^*=H_pN$ и $H_p$ является силовской $p$-подгруппой в $G$. Тогда

$$M=M\cap H^*=M\cap H_pN=N(M\cap H_p).$$

И, ввиду леммы 11, $M\cap H_p$ – максимальная подгруппа из $H_p$. Согласно условию теоремы, $M\cap H_p$ $Q$-вложена в $G$. По лемме 10(1), подгруппа $M\cap H_pN/N$ $Q$-вложена в $G/N$. Но $M\cap H_pN/N=M/N$ и поэтому мы заключаем, что максимальная подгруппа $M/N$ из $H^*/N$ Q-вложена в $G/N$.

Итак, $G/N$ удовлетворяет условию нашей теоремы. В силу минимальности $G$, мы видим, то $G/N$ принадлежит классу всех $p$-сверхразрешимых групп.

(2) $N$ *– единственная минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в H, и N – p-группа.*

Так как $\mathcal{A}_p$ – класс всех $p$-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, согласно лемме 6, то $N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в $G$, содержащаяся в $H$, и $\Phi(N) = 1$. Так как $G$ – $p$-разрешимая группа, то либо $N$ – $p$-группа, либо $N$ является $p'$-группой. Если $N$ – $p'$-группа, то $G$ принадлежит классу всех $p$-сверхразрешимых групп, что противоречит выбору группы $G$. Следовательно, $N$ – $p$-группа.

*Заключительное противоречие.*

Если $N$ содержится во всех максимальных подгруппах из $G$, то $N \leq \Phi(G)$. Поскольку $\mathcal{U}_p$ является насыщенной формацией, по лемме 6, то $G \in \mathcal{A}_p$, что противоречит выбору группы $G$. Следовательно, существует максимальная подгруппа $M$ из $G$ такая, что $G = NM$ и $N\cap M = 1$. Таким образом,

$$H_p=H_p\cap NM=N(H_p\cap M),$$

где $H_p$ – силовская $p$-подгруппа из $H$.

Пусть $K$ – произвольная максимальная подгруппа из $H_p$, содержащаяся в $H_p\cap M$. По условию теоремы, подгруппа $K$ $Q$-вложена в $G$. Значит, существует перестановочная подгруппа $T$ в $G$ такая, что $G = KT$ и $K \cap T \leq K_{sG}$.

Заметим, что $K\cap T=1$. Действительно, пусть $K\cap T\neq 1$. Так как $K\cap T$ – $s$-перестановочная $p$-подгруппа в $G$, то, по лемме 7(2), видим, что $K\cap T$ – субнормальная в $G$ подгруппа. По лемме 6(1), имеем $K\cap T \leq O_p(G)$.

Покажем, что $N = O_p(G)$. Действительно,

$$O_p(G) = O_p(G)\cap NL = N(O_p(G)\cap L).$$

Поскольку $O_p(G) \leq F(G) \leq C_G(N)$, то $O_p(G)\cap L$ нормальна в $G$ и поэтому $O_p(G)\cap L = 1$. Значит, $N = O_p(G)$.

Таким образом $T \cap K \leq N \cap K$. Допустим, что $N \leq T$. Тогда $T \cap K \leq N \cap K \leq T \cap K$ и поэтому $T \cap K = N \cap K$. Ясно, что $N \cap K$ – нормальная в $P$ подгруппа и поэтому, согласно лемме 8, $T \cap K$ – неединичная нормальная в $G$ подгруппа. Значит, $N \leq T \cap K \leq K$, противоречие. Следовательно, $N \not\subset T$ и $N = T$. Так как $T$ субнормальна в $G$, то все силовские $q$-подгруппы группы $G$ содержатся в $T$. Значит, $G/T_{\mathrm{G}}$ – $p$-группа. Следовательно, $G \cong G/N \cap T_{\mathrm{G}}$ – $q$-замкнутая группа. Таким образом, $G$ является $p$-нильпотентной группой и, по лемме 6, группа $G$ принадлежит классу всех $p$-сверхразрешимых групп, что противоречит выбору группы $G$. Значит, $T \cap K = 1$. Так как

$$H_{\mathrm{p}} = H_{\mathrm{p}} \cap KT = K(H_{\mathrm{p}} \cap T) \text{ и } K \leq H_{\mathrm{p}} = N(H_{\mathrm{p}} \cap L),$$

то

$$|H_{\mathrm{p}} \cap T| = |H_{\mathrm{p}} : K| = p = |N : N \cap K|.$$

Поскольку $G/T \cong K \in \mathsf{A}_p$ и $G/N \in \mathsf{A}_p$, то $G/(T \cap N) \in \mathsf{A}_p$. Значит, $N \leq T$, так как $G$ не принадлежит $\mathsf{A}_p$ классу $p$-сверхразрешимых групп и $N$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Следовательно, $N \cap K \leq T \cap K = 1$. Значит, $p = |N : N \cap K| = |N|$. Следовательно, $G \in \mathsf{A}_p$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Пусть $\mathfrak{F} = N\mathsf{A}$ – класс групп $G$, чьи коммутанты подгрупп нильпотентны, и где $N$ – класс нильпотентных подгрупп и $\mathsf{A}$ – класс абелевых групп. Понятно, что $\mathfrak{F}$ является формацией. Если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $(G/\Phi(G))' = G'\Phi(G)/\Phi(G)$ является нильпотентным и, более того, подгруппа $G'\Phi(G)$ нильпотентна. Тогда $G' \leq G'\Phi(G)$, что влечет нильпотентность $G'$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией и содержит класс $\mathsf{A}$ всех сверхразрешимых групп, поскольку коммутанты подгрупп сверхразрешимой группы нильпотентны. Итак, по теореме 12, мы имеем:

**Следствие 13.** Пусть $\mathfrak{F} = N\mathsf{A}$. Если $H$ – нормальная подгруппа в $G$ такая, что $G/H \in \mathrm{F}$ и максимальные подгруппы силовских подгрупп из $H$ $Q$-вложены в $G$, то $G \in \mathfrak{F}$.

**Следствие 14.** (Wang). Если максимальные подгруппы силовских подгрупп из $G$ $c$-нормальны в $G$, то $G$ – сверхразрешимая группа.

**Следствие 15.** Если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы $G$ являются $Q$-вложенными в $G$, то $G$ – сверхразрешимая группа.

**Литература**

1. Huppert, B. Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math. – 1961. – XII. – P. 161–169.

2. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups / S.Srinivasan // Israel J. Math. – 1980. – Vol. 35, № 3. – P. 210–214.

3. Wang, Y. c-Normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.

4. Wei, H. On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei // Comm. Algebra. – 2001. – Vol. 29, № 5. – P. 2193–2200.

5. Wei, H.On c-Normal Maximal and Minimal Subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei, W. Yanming, Li Yangming // Comm. Algebra. – 2003. – Vol. 31, № 10. – P. 4807–4816.

6. Asaad, M. On permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, A.A. Heliel // Arch. Math. – 2002. – Vol. 80. – P. 113–118.

7. Ballester-Bolinches, A. On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X.Guo // Arch. Math. – 1999. – № 72. – P. 161–166.

8. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.

9. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter : Berlin – New York, 1992. – 889 p.

10. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szép // Act. Sci. Math. – 1962. – Vol. 23. – P. 168–170.

11. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125–132.

12. Thompson, J.G. An example of core-free quasinormal subgroups of p-groups / J.G. Thompson // Math. Z. – 1967. – Vol. 96, № 2. – P. 226–227.

13. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S.E. Stonehewer // Math. Z. – 1972. – Vol. 125. – P. 1–16.

14. Maier, R. The embedding of permutable subgroups in finite groups / R. Maier, P. Schmid // Z. Math. – 1973. – Vol. 131. – P. 269–272.

15. Schmid, P. Subgroups permutable witn all Sylow subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – Vol. 207. – P. 285–293.

16. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups. Vol. 14 : De Gruyter Expositions in Mathematics / R. Schmidt // Walter de Gruyter–Berlin–New York, 1994.

17. Чунихин, С.А. Об условиях теорем типа Силова / С.А. Чунихин // ДАН СССР. – 1949. – Т. 69, № 6. – С. 735–737.

18. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск : Наука и техника, 1964. – 158 с.

19. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.

20. Baer, R. Classes of finite groups and their propeties / R. Baer // Illinois Math. Journal. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

21. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 180. – P. 954–965.

22. Hutsko, N.V. Finite groups with given nearly S -quasinormal subgroups / N.V. Hutsko, V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // Asian-European journal of math. – 2008. – Vol. 1, № 3. – P. 369–382.

23. Hutsko, N.V. On well p-embedded subgroups of finite groups / N.V. Hutsko, A.N. Skiba // Algebra and discrete math. – 2008. – № 2. – P. 50–64.

24. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York–Evanston–London: Harper and Row, 1968. – 527 p.

25. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

26. Wielandt H. Subnormal subgroups and permutation groups / H. Wielandt; Lectures given at the Ohio State University, Columbus : Ohio, 1971.

27. Ramadan, M. On c-normality of certain subgroups of prime power oder of finite groups / M. Ramadan, M. Ezzat Mohamed, A.A. Heliel // Arch. Math. – 2005. – Vol. 85. – P. 203–210.

28. Skiba, A.N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.