**Н. В. Гуцко**

# ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ *p*-НИЛЬПОТЕНТНЫХ И *p*-СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ПО СВОЙСТВАМ ИХ С-КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Напомним, что подгруппа $A$ группы $G$ перестановочна с подгруппой $B$, если $AB = BA$. Подгруппа $H$ группы $G$ называется перестановочной [1] или квазинормальной [2] в $G$, если она перестановочна со всеми подгруппами группы $G$.

Подгруппа $H$ группы $G$ называется $c$-нормальной в $G$, если существует нормальная подгруппа $T$ из $G$ такая, что $G = HT$ и $T \cap H$ – нормальная подгруппа в $G$. Понятие $c$-нормальности было введено в работе [3], где была построена содержательная теория $c$-нормальных подгрупп и даны некоторые ее приложения в вопросах классификации непростых подгрупп.

В данной работе мы анализируем следующее понятие, которое одновременно обобщает как условие квазинормальности, так и условие $c$-нормальности для подгрупп.

**Определение 1.** Пусть $H$ – подгруппа группы $G$. Тогда будем говорить, что $H$ $c$-квазинормальна в $G$, если в $G$ имеется такая квазинормальная подгруппа $T$, что $G = HT$ и $T \cap H$ квазинормальна в $G$.

Основной целью данной работы является изучение строения группы при условии, что некоторые максимальные или минимальные подгруппы силовских подгрупп этой группы $c$-квазинормальны.

В наших доказательствах мы будем использовать следующие общие свойства $c$-квазинормальных подгрупп.

**Лемма 2.** *Пусть $G$ – группа и $H \le K \le G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если $H$ квазинормальна в $G$, то $H$ $c$-квазинормальна в $G$.*

(2) *Если $H$ $c$-квазинормальна в $G$, то $H$ $c$-квазинормальна в $K$.*

(3) *Пусть $H$ – нормальная в $G$ подгруппа. Тогда $K/H$ – $c$-квазинормальная подгруппа в группе $G/H$ тогда и только тогда, когда $K$ – $c$-квазинормальная подгруппа в группе $G$.*

(4) *Пусть $H$ – нормальная в $G$ подгруппа. Тогда для всех $c$-квазинормальных в $G$ подгрупп $E$ таких, что $(|H|,|E|) = 1$, $HE/H$ – $c$-квазинормальная подгруппа в группе $G/H$.*

(5) *Пусть $H$ – $p$-группа, для некоторого простого числа $p$, и $H$ – $c$-квазинормальная в $G$ подгруппа, которая не квазинормальна в $G$. Тогда в группе $G$ существует такая нормальная подгруппа $M$, что $|G:M| = p$ и $G = HM$.*

**Лемма 3.** (см. [2]). *Пусть G – группа и* $H \le G$. *Тогда если H квазинормальна в G, то H субнормальна в G.*

**Лемма 4.** (см. [4; II, следствие 7.7.2]). *Пусть G – группа и* $A \le G$. *Тогда*

(1) *Если A – субнормальная холлова подгруппа группы G, то A нормальна в группе G.*

(2) *Если A субнормальна в G и A – π-подгруппа группы G, то* $A \le O_{\pi}(G)$.

(3) *Если A – субнормальная разрешимая подгруппа группы G, то A содержится в некоторой разрешимой нормальной в G подгруппе.*

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [5, лемма A]).

**Лемма 5.** *Если H квазинормальна в G и H – p-группа для некоторого простого p, то* $O^{p}(G) \le N_{G}(H)$.

Напомним определения формации, насыщенной формации и приведем основные обозначения.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если он замкнут относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Таким образом, для формации выполняются требования:

(1) если $G \in \mathfrak{F}$ и *N* нормальна в *G*, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

(2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формация называется насыщенной, если она является насыщенным классом, т. е. для нее выполняется требование: если $G/N \in \mathfrak{F}$, $N \le \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть *p* – простое число. Обозначим через $\mathsf{A}_p$ – класс всех групп *G* таких, что каждый *p*-главный фактор группы *G* является циклическим (*G* – *p*-сверхразрешимая группа), и через $\mathsf{A}$ обозначим класс всех сверхразрешимых групп. Ясно, что $\mathsf{A}_p$ и $\mathsf{A}$ являются насыщенными формациями.

**Лемма 6.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы и пусть G – группа с разрешимым* $\mathfrak{F}$*-корадикалом* $P = G^{\mathfrak{F}}$. *Предположим, что каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая P, принадлежит* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $P = G^{\mathfrak{F}}$ *– p-группа для некоторого простого числа p и если каждая циклическая подгруппа группы P простого порядка и порядка 4 (если p = 2 и P – неабелевая группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, c-квазинормальна в G, то* $|P/\Phi(P)| = p$.

**Доказательство.** Согласно [4, теорема 24.2], $P = G^{\mathfrak{F}}$ – *p*-группа для некоторого простого числа *p* и справедливы следующие утверждения:

(1) $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы *G*;

(2) *P* имеет экспоненту *p* или экспоненту 4 (если *p* = 2 и *P* – неабелевая группа).

Предположим, что каждая циклическая подгруппа группы *P* простого порядка и порядка 4 (если *p* = 2 и *P* – неабелевая группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в *G*, *c*-квазинормальна в *G*.

Пусть $\Phi = \Phi(P)$, $X/\Phi$ – подгруппа простого порядка в $P/\Phi$, $x \in X/\Phi$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда либо $|L| = p$, либо $|L| = 4$ и поэтому по условию либо $L$ имеет сверхразрешимое добавление $T$ в $G$, либо подгруппа $L$ $c$-квазинормальна в $G$. В первом случае мы можем предполагать, что $T \neq G$ и поэтому поскольку $\Phi \leq \Phi(G)$, то $T\Phi \neq G$. Так как $LT = G$, то

$$(T\Phi/\Phi)(L\Phi/\Phi) = (T\Phi/\Phi)(X/\Phi) = G/\Phi.$$

Значит, $|G/\Phi{:}T\Phi/\Phi| = p$ и поскольку $G/\Phi = (P/\Phi)(T\Phi/\Phi)$, то $|P/\Phi(P)| = p$.

Таким образом, мы можем предполагать, что все подгруппы простого порядка группы $P/\Phi$ являются $c$-квазинормальными в $G/\Phi$. В силу леммы и утверждения (1) это влечет $|P/\Phi(P)| = p$. Лемма доказана.

**Лемма 7.** *Пусть $G$ – группа с нормальной подгруппой $N$ такой, что $G = QN$, для некоторой подгруппы $Q$ в $G$. Если $M$ – максимальная подгруппа группы $G$ такая, что $N \leq M$, то $M \cap Q$ – максимальная подгруппа в $Q$.*

**Доказательство.** Поскольку $G/N \cong Q/(Q \cap N)$, то $(M \cap Q)/(Q \cap N)$ – максимальная подгруппа в $Q/(Q \cap N)$, и более того, $M \cap Q$ – максимальная подгруппа в $Q$. Лемма доказана.

Многими авторами изучалось строение групп, у которых максимальные подгруппы силовских подгрупп некоторых подгрупп основной группы $c$-квазинормальны. В данной работе мы прежде изучаем группу $G$, у которой каждая максимальная подгруппа силовской $p$-подгруппы $c$-квазинормальна.

**Теорема 8.** *Пусть $p$ – наименьшее простое число, делящее порядок группы $G$, и $P$ – силовская $p$-подгруппа в $G$. Если каждая максимальная подгруппа в $P$ является $c$-квазинормальной в $G$, то $G$ – $p$-нильпотентная группа.*

**Доказательство.** Предположим, что теорема не верна и пусть $G$ – контрпример минимального порядка.

(1) *Факторгруппа $G/N$ $p$-нильпотентна для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ из $G$.*

Применяя лемму 2 и лемму 7, видим, что условие теоремы наследуется факторгруппой $G/N$. Но $|G/N| < |G|$ и поэтому в силу выбора группы $G$ имеем утверждение (1).

(2) *В группе $G$ имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа $N$ и $N \not\subset \Phi(G)$.*

Это прямо вытекает из (1) и того факта, что класс всех $p$-нильпотентных групп замкнут относительно образования подпрямых произведений (см. [4, с. 35]) и всегда из $p$-нильпотентности факторгруппы $G/\Phi(G)$ следует $p$-нильпотентность самой группы $G$.

(3) *Подгруппа P не является циклической.*

Поскольку $p$ является наименьшим простым делителем порядка группы $G$, то (3) следует из [6, теорема 10.1.9].

(4) $O_{p'}(G) = 1$.

Действительно, предположим, что $O_{p'}(G) \neq 1$ и рассмотрим факторгруппу $G/O_p(G)$. Покажем, что $G/O_p(G)$ удовлетворяет гипотезе нашей теоремы. По условию теоремы, $p$ делит порядок группы $G$, значит, $p$ делит порядок группы $G/O_{p'}(G)$.

Пусть $P/O_p(G)$ – силовская $p$-подгруппа в $G/O_p(G)$ и $P_1/O_p(G)$ – произвольная максимальная в $P/O_{p'}(G)$подгруппа. Покажем, что подгруппа $P_1/O_p(G)$ $c$-квазинормальна в $G/O_{p'}(G)$. Если $P_0$ – силовская $p$-подгруппа в $P$, то $P=P_0O_{p'}(G)$ и $P_0$ является силовской $p$-подгруппой в $G$. Покажем, что $P_1 \cap P_0$ – максимальная в $P_0$ подгруппа. Заметим, что $P_1 \cap P_0 \neq P_0$. Действительно, если $P_1 \cap P_0 = P_0$, то $P_0 \subseteq P_1$, а, значит,

$$P_1/O_{p'}(G) = P_0 O_{p'}(G)/O_{p'}(G) = P/O_{p'}(G),$$

что противоречит выбору подгруппы $P_1/O_{p'}(G)$. Допустим, что в группе $G$ имеется такая подгруппа $T$, что $P_1 \cap P_0 \subset T \subset P_0$.Тогда

$$P_1 = O_{p'}(G)(P_1 \cap P_0) \subseteq TO_{p'}(G) \subseteq P_0 O_{p'}(G) = P.$$

Но $P_1$ – максимальная в $P$ подгруппа и поэтому

$$\text{либо } P_1 = TO_{p'}(G), \text{ либо } TO_{p'}(G) = O_{p'}(G)P_0.$$

Если $P_1 = TO_{p'}(G)$, то $T \subseteq P_1 \cap P_0 \subset T$, что невозможно. Итак, $TO_{p'}(G) = O_{p'}(G)P_0$ и поэтому

$$P_0 = P_0 \cap TO_{p'}(G) = T(P_0 \cap O_{p'}(G)) \subseteq T(P_1 \cap P_0) = T.$$

Полученное противоречие показывает, что $P_1 \cap P_0$ – максимальная в $P_0$ подгруппа. Согласно условию теоремы, $P_1 \cap P_0$ – $c$-квазинормальная подгруппа в $G$. Тогда по лемме 2 (3) подгруппа $(P_1 \cap P_0)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ с-квазинормальна в $\mathrm{G}/\mathrm{O}_{\mathrm{p}'}(\mathrm{G})$. Но $(P_1 \cap P_0)O_{\mathrm{p}'}(G)/O_{\mathrm{p}'}(G) = P_1/O_{\mathrm{p}'}(G)$ и поэтому мы заключаем, что максимальная подгруппа $P_1/O_{\mathrm{p}'}(G)$ из $P/O_{\mathrm{p}'}(G)$ $c$-квазинормальна в $G/O_{p'}(G)$. Итак, каждая максимальная подгруппа из $P/O_{p'}(G)$ $c$-квазинормальна в $G/O_{p'}(G)$.

Таким образом, $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет гипотезе нашей теоремы. В силу минимальности $G$, мы видим, что $G/O_{p'}(G)$ $p$-нильпотентна и поэтому $G$ – $p$-нильпотентная группа, что противоречит выбору группы $G$.

Пусть $P_1$ произвольная максимальная подгруппа в $P$. Тогда по условию теоремы $G$ имеет такую квазинормальную подгруппу $T$, что $G = P_1 T$ и $D = P_1 \cap T$ – квазинормальная подгруппа в $G$.

(5) $D \neq 1$.

Пусть $D$ = 1. Тогда $T$ является $p$-нильпотентной подгруппой в $G$. Так как $T$ – квазинормальная подгруппа в $G$, то по лемме 3 $T$ субнормальна в $G$. Тогда $T_{p'}$ – субнормальная подгруппа в $G$. Но $T_{p'} = G_{p'}$ – холловская $p'$-подгруппа группы $G$ и поэтому по лемме 4(1) эта подгруппа нормальна в группе $G$. Следовательно, $G$ – $p$-нильпотентная группа. Это противоречит выбору группы $G$. Итак, $D \neq 1$.

*Заключительное противоречие.*

Так как $P_1 \cap T$ – квазинормальная в $G$ подгруппа, то по лемме 3 видим, что $P_1 \cap T$ – субнормальная $p$-подгруппа в $G$. По лемме 4(2) имеем $P_1 \cap T \leq O_p(G)$. Ввиду (2) существует максимальная подгруппа $L$ из $G$ такая, что $G=[N]L$ и $N \cap L=1$, причем $N=C_G(N)=O_p(G)$ (см. доказательство теоремы 3.1). Тогда либо $P_1 \cap T=N$, либо $P_1 \cap T < N$. Если $P_1 \cap T = N$, то $N \leq P_1$ и поэтому $G = P_1L$, что приводит к противоречию (см. доказательство теоремы 3.1). Значит, $P_1 \cap T<N$. Так как $P_1 \cap T$ – квазинормальная подгруппа в $G$, то $(P_1 \cap T)L = L(P_1 \cap T)$ и поэтому $L(P_1 \cap T) \leq G$. Но $L$ – максимальная подгруппа в $G$, следовательно, $L(P_1 \cap T) = G$. Тогда

$$N=N \cap L(P_1 \cap T)=P_1 \cap T.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**Лемма 9.** *Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и $G_p$ – силовская p-подгруппа в G. Если подгруппы из $G_p$ с порядком p или порядком 4 являются c-квазинормальными в G, то G – p-нильпотентная группа.*

**Доказательство.** Предположим, что теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка.

Пусть все подгруппы из $G_p$ с порядком $p$ или порядком 4, если $p = 2$, являются квазинормальными в G. Так как G не является $p$-нильпотентной группой, то согласно [7, глава IV, теорема 5.4] G содержит $p$-замкнутую подгруппу Шмидта $H = [H_p]H_q$. Ввиду условия теоремы H имеет экспоненту $p$ или экспоненту 4, если $p = 2$. Значит, согласно лемме 6 имеет место $|H_p/\Phi(H_p)| = p$, что не возможно, поскольку $p$ – наименьший простой делитель порядка группы $G$.

Значит, существует подгруппа $L$ в $G_p$ простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, не являющаяся квазинормальной в $G$. Тогда по лемме 2(5) существует максимальная нормальная подгруппа $M$ в $G$ такая, что $G = LM$ и $|G:M| = p$. Так как M является нормальной подгруппой в $G$, то $M_p=G_p \cap M$ – силовская $p$-подгруппа в $M$. По лемме 2(2) каждая подгруппа простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, из $M_p$ $c$-квазинормальна в $M$. Итак, условие теоремы наследуется подгруппой $M$ и $|M|<|G|$. Поэтому $M$ – $p$-нильпотентная группа. Тогда $M = [M_{p'}]M_p$. Так как $M_{p'}$ является характеристической подгруппой в $M$, которая нормальна в $G$ и, очевидно, $M_{p'}=G_{p'}$ – холловская $p'$-подгруппа в $G$, то $G$ – $p$-нильпотентная группа. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**Теорема 10.** *Пусть $p$ – простое число, и $H$ – нормальная подгруппа группы $G$ такая, что* $G/H \in \mathcal{A}_p$. Если подгруппы из $H$ простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, $c$-квазинормальны в $G$, то $G \in \mathcal{A}_p$.

**Доказательство.** Предположим, что теорема не верна и рассмотрим контрпример, для которого $|G|\,|H|$ минимально.

(1) *Условие теоремы выполняется в любой холловой подгруппе $X$ группы $H$ (относительно $X$).*

Действительно, $X/X \in \mathcal{A}_p$ и по лемме 2(2) подгруппы из $X$ простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, $c$-квазинормальны в $X$. Итак, условие теоремы выполняется для группы $X$ (относительно $X$).

(2) *Условие теоремы выполняется для каждой факторгруппы $G/X$ (относительно $H/X$), где $X$ – нормальная холлова подгруппа группы $H$.*

Действительно, $(G/H)/(H/X) \cong G/H \in \mathcal{A}_p$ и ввиду леммы 2(3) условие теоремы выполняется для $G/X$ (относительно $H/X$).

(3) *Если $X$ – неединичная нормальная холлова подгруппа группы $H$, то $X=H$.*

Так как $X$ – характеристическая подгруппа группы $H$, то она нормальна в $G$ и поэтому ввиду (2), условие теоремы справедливо для $G/X$ (относительно $H/X$). Значит, по выбору группы $G$ и ее подгруппы $H$ имеет место $G/X \in \mathcal{A}_p$. Следовательно, условие теоремы справедливо для $G$ (относительно $X$) и поэтому $X=H$.

(4) *Всякая подгруппа $K$ простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, из группы $H$ квазинормальна в $G$.*

Пусть $K$ – подгруппа простого порядка или порядка 4. Согласно условию теоремы, $K$ $c$-квазинормальна в $G$. Допустим, что $K$ не является квазинормальной в $G$ подгруппой. Тогда ввиду леммы 2(5) $G$ содержит такую нормальную подгруппу $M$, что $G = KM$ и $|G:M| = p$. Поскольку класс $\mathcal{A}_p$ является насыщенной формацией и замкнут относительно подпрямых произведений, то $G/H\cap M \in \mathcal{A}_p$. Значит, по лемме 2(2) условие теоремы выполняется для $G$ относительно подгруппы $H\cap M$. Но поскольку $M$ является собственной подгруппой группы $G$ и $G=KM$, то $|H\cap M|<|N|$ и поэтому $|G||H\cap M|<|G||H|$, что противоречит выбору группы $G$ и ее нормальной подгруппы $H$. Следовательно, всякая подгруппа $K$ простого порядка или порядка 4, если $p = 2$, из группы $H$ квазинормальна в $G$.

Зафиксируем теперь некоторую силовскую $p$-подгруппу $H_p$ группы $H$, где $p$ – наименьший простой делитель порядка группы $H$.

(5) $H=H_p$.

Согласно лемме 9, подгруппа $H$ $p$-нильпотентна. Значит, $H$ имеет нормальную холлову $p'$-подгруппу $E$. Согласно (3), имеет место $E = H$. Следовательно, $p$ не делит порядок группы $H$. Полученное противоречие доказывает утверждение (5).

*Заключительное противоречие*

Пусть $L = G^{\mathfrak{A}_p}$ и $\Phi = \Phi(L)$. Понятно, что $L \leq H$ и поэтому условие теоремы верно для $G$ относительно $L$, что в силу выбора группы $G$ и подгруппы $H$ влечет $L = H$. Пусть $M$ – максимальная подгруппа группы $G$, не содержащая подгруппу $H$. Тогда $G/H \cong M/M \cap H \in \mathfrak{A}_p$ и поэтому, согласно лемме 6, имеет место $|L/\Phi| = p$. Значит, по лемме 2.5, $G/\Phi \in \mathfrak{A}_p$. Но тогда $L \leq \Phi$ и поэтому $L = \Phi$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**Литература**

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter : Berlin – New York, 1992.
2. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O.Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.
3. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 180. – P. 954–965.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
5. Schmid, P. Subgroups permutable witn all Sylow subgroups // J. Algebra. – 1998. – Vol. 207. – P. 285–293.
6. Robinson, D.J.S. A courser in the theory of group / D.J.S. Robinson. – New York and oth. : Springer-Verlag, 1982. – 484 p.
7. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer, 1967. – 793 p.