

С. М. Бирук

ТРАЕКТОРИИ КЛАССА КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С ДВУКРАТНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ НА СФЕРАХ ПУАНКАРЕ И БЕНДИКСОНА

Введение. Согласно [1] всякая квадратичная автономная полиномиальная дифференциальная система второго порядка с линейным частным интегралом некоторым невырожденным линейным преобразованием может быть приведена к системе одного из видов:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = x^2, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j; & \quad (1) \\ \frac{dx}{dt} = xy, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j; & \quad \frac{dx}{dt} = x + ax^2, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j; \\ \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j. & \end{aligned}$$

Для указанных систем функция

$$w: (x, y) \rightarrow x \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

является частным интегралом.

Теорема: Для того чтобы автономная полиномиальная дифференциальная система второго порядка имела двукратный линейный частный интеграл, достаточно, чтобы она некоторым невырожденным линейным преобразованием приводилась к виду (1).

Действительно, производная в силу системы (1)

$$\mathbf{P} \frac{a+x}{x} = -a,$$

где $\mathbf{P}(x, y) = x^2 \partial_x + \sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j \partial_y$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

В виду определения кратности частного интеграла [2, ст. 193–194]

$$\varepsilon = \xi = 1, \quad h_1 = f_1 = g_1 = 1,$$

$$Q_{11}(x, y) = a + x, \quad R_{11}(x, y) = -a \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Полином $Q_{11}(x, y)$ взаимно прост с полиномиальным частным интегралом w , а у полинома $R_{11}(x, y)$ степень меньше $p_1 - 1 = 1$.

Поэтому частный интеграл w системы (1) имеет кратность $\kappa = 1 + f_1 = 2$.

Поставим задачу: исследовать поведение траекторий системы (1) при $b_{02} = 0$, $|b_{00}| + |b_{01}| \neq 0$, далее системы (1'), на сферах Пуанкаре и Бендиксона.

Поведение траекторий на сфере Пуанкаре будем описывать посредством проективного атласа, состоящего из трех карт KP_1, KP_2, KP_3 . Карты атласа представляют собой фазовые портреты поведения траекторий на круге Пуанкаре соответственно системы (1') и систем, полученных из (1') при проективных преобразованиях Пуанкаре $x = z^{-1}$, $y = uz^{-1}$ и $x = vz^{-1}$, $y = z^{-1}$. Такой подход к описанию поведения траекторий дифференциальной системы на сфере Пуанкаре был предложен в [3].

Поведение траекторий на сфере Бендиксона будем описывать посредством атласа, состоящего из двух координатных карт KB_1 и KB_2 . Карта KB_1 представляет собой круг, состоящий из точек фазовой плоскости Oxy , с центром в точке $O(0,0)$, на котором лежат все изолированные состояния равновесия системы (1'), отличные от бесконечно удаленного. Карта KB_2 – круг из точек плоскости $O^*\xi\zeta$ с центром в начале координат, на котором лежит не более одного изолированного состояния равновесия $O^*(0,0)$ системы, полученной из (1') при преобразовании Бендиксона

$$x = \frac{4\xi}{\xi^2 + \zeta^2}, \quad v = \frac{4\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} \quad \forall (\xi, \zeta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Такой подход к описанию поведения траекторий дифференциальной системы на сфере Бендиксона предложен в [4].

Качественное исследование. При исследовании поведения траекторий системы (1') в окрестности экватора сферы Пуанкаре различаем два случая: $|b_{20}| + |b_{11} - 1| \neq 0$, когда (1') имеет неособый тип при преобразованиях Пуанкаре, и $b_{20} = 0$, $b_{11} = 1$, когда (1') имеет особый тип при преобразованиях Пуанкаре [3].

В первом случае экватор сферы Пуанкаре является траекторией системы (1'), которая первым и вторым преобразованиями Пуанкаре соответственно приводится к системам

$$\frac{du}{d\tau} = -b_{20} - (b_{11} - 1)u - b_{10}z - b_{01}uz - b_{00}z^2, \quad \frac{dz}{d\tau} = z; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= b_{01}z^2 + b_{11}zv + b_{00}z^3 + b_{10}z^2v + b_{20}v^2, \\ \frac{dv}{d\tau} &= b_{01}zv + (b_{11} - 1)v^2 + b_{00}z^2v + b_{10}zv^2 + b_{20}v^3, \end{aligned} \quad (3)$$

где $dt = -zd\tau$.

Во втором случае экватор сферы Пуанкаре не является траекторией системы (1'), которая первым и вторым преобразованиями Пуанкаре соответственно приводится к системам

$$\frac{du}{dt} = b_{10} + b_{01}u + b_{00}z, \quad \frac{dz}{dt} = -u; \quad (4)$$

$$\frac{dz}{dt} = -b_{01}z - v - b_{00}z^2 - b_{10}zv, \quad \frac{dv}{dt} = -b_{01}v - b_{00}zv - b_{10}v^2. \quad (5)$$

Исследуя поведение траекторий системы (1') в окрестности бесконечно удаленной точки (северного полюса) сферы Бендиксона [4], различаем два случая: $|b_{20}| + |b_{11} - 1| \neq 0$, когда система (1') имеет неособый тип при преобразовании Бендиксона, и $b_{20} = 0$, $b_{11} = 1$, когда система (1') имеет особый тип при преобразовании Бендиксона [4].

В первом случае преобразованием Бендиксона систему (1') приводим к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\rho} &= -4\xi^4 - 8b_{20}\xi^3\zeta + 4(1 - 2b_{11})\xi^2\zeta^2 + 2b_{20}\xi^4\zeta - 2b_{01}\xi^3\zeta^2 - \\ &- 2b_{10}\xi^2\zeta^3 - 2b_{01}\xi\zeta^4 - \frac{b_{00}}{2}\xi^5\zeta - b_{00}\xi^3\zeta^3 - \frac{b_{00}}{2}\xi\zeta^5, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\rho} &= 4b_{20}\xi^4 + 4(b_{11} - 2)\xi^3\zeta - 4b_{20}\xi^2\zeta^2 - 4b_{11}\xi\zeta^3 + b_{10}\xi^5 + b_{01}\xi^4\zeta - \\ &- b_{10}\xi\zeta^4 - b_{01}\zeta^5 + \frac{b_{00}}{4}\xi^6 + \frac{b_{00}}{4}\xi^4\zeta^2 - \frac{b_{00}}{4}\xi^2\zeta^4 - \frac{b_{00}}{4}\zeta^6, \end{aligned}$$

где $(\xi^2 + \zeta^2)^2 d\rho = dt$, а во втором случае – к виду

$$\frac{d\xi}{d\gamma} = -4\xi^2 - 2b_{10}\xi^2\zeta - 2b_{01}\xi\zeta^2 - \frac{b_{00}}{2}\xi^3\zeta - \frac{b_{00}}{2}\xi\zeta^3, \quad (6')$$

$$\frac{d\zeta}{d\gamma} = \xi\zeta + b_{10}\xi^3 + b_{01}\xi^2\zeta - b_{10}\xi\zeta^2 - b_{01}\zeta^3 + \frac{b_{00}}{4}\xi^4 - \frac{b_{00}}{4}\zeta^4,$$

где $(\xi^2 + \zeta^2)d\gamma = dt$, так как $b_{11} \neq 2$.

Для систем (2) и (4) двукратным линейным частным интегралом на проективной фазовой плоскости $\mathbf{R}P^2$ с координатами (x, u, z) является

$$w_1 : (x, u, z) \rightarrow x \quad \forall (x, u, z) \in \mathbf{R}P^2,$$

соответствующий бесконечно удаленной прямой-траектории $x = 0$.

Для систем (3) и (5) двукратным линейным частным интегралом на проективной фазовой плоскости $\mathbf{R}P^2$ с координатами (y, z, v) является

$$w_2 : (y, z, v) \rightarrow v \quad \forall (y, z, v) \in \mathbf{R}P^2.$$

Для систем (6) и (7) двукратным линейным частным интегралом является

$$w_3 : (\xi, \zeta) \rightarrow \xi \quad \forall (\xi, \zeta) \in \mathbf{R}^2.$$

Результаты исследования изолированных состояний равновесия систем (1'), (2)–(7) приведены в таблицах 1–3.

Таблица 1 – Изолированные состояния равновесия систем (1'), (2)–(7)

Сист.	Сост. равн.		$A_2 (b_{11} \neq 1)$		A_3	A_4
	$A_1 (b_{01} \neq 0)$ $(b_{00} \neq 0)$	$(b_{00} = 0)$	$(b_{20} \neq 0)$	$(b_{20} = 0)$		
(1')	$\left(0, -\frac{b_{00}}{b_{01}}\right)$		«концы» $b_{20}x + (b_{11} - 1)y = 0$		«концы» $x = 0$	бесконечно удаленная точка
(2)	«концы» $b_{01}u + b_{00}z = 0$		$\left(\frac{b_{20}}{1 - b_{11}}, 0\right)$		«концы» $z = 0$	—
(3)	$\left(-\frac{b_{01}}{b_{00}}, 0\right)$	«концы» $v = 0$	$\left(0, \frac{1 - b_{11}}{b_{20}}\right)$	«концы» $z = 0$	(0,0)	—
(4)	«концы» $b_{01}u + b_{00}z = 0$		—		«концы» $z = 0$	—
(5)	$\left(-\frac{b_{01}}{b_{00}}, 0\right)$	«концы» $v = 0$	—		(0,0)	—
(6), (7)	$\left(0, -\frac{4b_{01}}{b_{00}}\right)$	бесконечно удаленная точка	—		—	(0,0)

Таблица 2 – Характер состояний равновесия при $b_{01} \neq 0$

b_{11}	b_{00}	b_{20}	Дополн. условия	Сост. равнов.				Карты атласов				
				A_1	A_2	A_3	A_4	KP_1	KP_2	KP_3	KB_1	KB_2
<1	≠0	≠0	$k_1 < 0$	с-у	у	2п2г	2п2э	1	2	3	35	36
<1	≠0	≠0	$k_1 > 0$	с-у	у	2п2г	2п2э	1	2	4	35	36
<1	≠0	=0	—	с-у	у	2п2г	2п2э	1	2	5	35	36
<1	=0	≠0	—	с-у	у	2п2г	2п2э	1	2	6	35	36
<1	=0	=0	—	с-у	у	2п2г	2п2э	1	2	7	35	36
=1	≠0	≠0	$b_{00}b_{01} < 0$	с-у	—	2пэг	2п2э	8	9	10	35	36
=1	≠0	≠0	$b_{00}b_{01} > 0$	с-у	—	2пэг	2п2э	8	9	11	35	36
=1	≠0	=0	—	с-у	—	ву	2п2э	12	13	14	35	36
=1	=0	≠0	—	с-у	—	2пэг	2п2э	8	9	15	35	36
=1	=0	=0	—	с-у	—	ву	2п2э	12	13	16	35	36
>1	∇	=0	$b_{10}b_{01} < 0,$ $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	19	35	36
>1	≠0	≠0	$b_{00}b_{01} < 0,$ $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	20	35	36
>1	≠0	<0	$b_{00}b_{01} > 0,$ $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	21	35	36
>1	≠0	>0	$b_{00}b_{01} > 0,$ $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	22	35	36
>1	≠0	≠0	$k_1 < 0,$ $k_2 = 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	23	24	25	35	36
>1	≠0	≠0	$k_1 > 0,$ $k_2 = 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	23	24	26	35	36
>1	≠0	=0	$b_{00}b_{01} < 0,$ $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	27	35	36
>1	≠0	=0	$b_{00}b_{01} > 0,$ $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	28	35	36
>1	≠0	=0	$k_2 = 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	23	24	29	35	36
>1	=0	≠0	$k_2 = 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	23	24	30	35	36
>1	=0	<0	$k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	31	35	36
>1	=0	>0	$k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	32	35	36
>1	=0	=0	$b_{10}b_{01} > 0,$ $k_2 \neq 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	17	18	33	35	36
>1	=0	=0	$k_2 = 0$	с-у	с	2п2э	2п2э	23	24	34	35	36

Таблица 3 – Характер состояний равновесия при $b_{01} = 0$, $b_{00} \neq 0$

b_{11}	b_{10}	b_{20}	Дополн. условия	Сост. равнов.			Карты атласов				
				A_2	A_3	A_4	KP_1	KP_2	KP_3	KB_1	KB_2
< -1	$\neq 0$	$= 0$	—	у	2п2г	4п4э	37	38	39	63	64
< -1	$= 0$	$= 0$	—	у	2п2г	4п4э	37	38	40	63	64
< -1	\forall	< 0	—	у	2п2г	4п4э	37	38	41	63	64
< -1	\forall	> 0	—	у	2п2г	4п4э	37	38	42	63	64
$\in [-1, 1)$	\forall	< 0	—	у	2п2г	2п2э	43	44	45	65	36
$\in [-1, 1)$, $\neq 0$	\forall	$= 0$	—	у	2п2г	2п2э	43	44	46	65	36
$\in [-1, 1)$	\forall	> 0	—	у	2п2г	2п2э	43	44	47	65	36
$= 0$	\forall	$= 0$	—	у	2п2г	2п2э	43	44	48	65	36
$= 1$	\forall	$= 0$	—	—	2пэг	2п2э	49	50	51	65	36
$= 1$	\forall	$\neq 0$	$b_{00}b_{20} < 0$	—	3п2э2г	2п2э	52	53	54	65	36
$= 1$	\forall	$\neq 0$	$b_{00}b_{20} > 0$	—	у	2п2э	55	55	56	65	36
> 1	$\neq 0$	$= 0$	—	с	2п2э	2п2э	57	58	59	65	36
> 1	$= 0$	$= 0$	—	с	2п2э	2п2э	57	58	60	65	36
> 1	\forall	< 0	—	с	2п2э	2п2э	57	58	61	65	36
> 1	\forall	> 0	—	с	2п2э	2п2э	57	58	62	65	36

В таблице 1 указаны условия существования изолированных состояний равновесия (в скобках непосредственно за обозначением состояния равновесия) и их расположение на проективных фазовых плоскостях систем (1'), (2)–(7).

В таблицах 2 и 3 указан вид изолированных состояний равновесия систем (1'), (2)–(7). При этом использовались условные обозначения:

$$k_1 = b_{00}b_{01}b_{20}, \quad k_2 = (1 - b_{11})(b_{01}b_{10} - b_{00}b_{11}) + b_{01}^2b_{20},$$

« \forall » – любое; «с» – седло; «у» – узел; «ду» – дикритический узел; «ву» – вырожденный узел; «с-у» – седло-узел; «2п2г» – сложное состояние равновесия, состоящее из двух параболических и двух гиперболических секторов Бендиксона; «2пэг» – сложное состояние равновесия, состоящее из одного эллиптического, двух сопровождающих его параболических и одного гиперболического секторов Бендиксона; «2п2э» – сложное состояние равновесия, состоящее из двух эллиптических и двух сопровождающих их параболических секторов Бендиксона; «4п4э» – сложное состояние равновесия, состоящее из четырех эллиптических и четырех сопровождающих их параболических секторов Бендиксона; «3п2э2г» – сложное состояние равновесия, состоящее из трех параболических, двух эллиптических и двух гиперболических секторов Бендиксона.

Поведение траекторий системы (1') с учетом расположения и характера ее состояний равновесия определяется однозначно. При этом

учитывается отсутствие предельных циклов. Последнее следует уже из того, что все состояния равновесия системы (1') расположены на прямых-траекториях $x = 0$ и $z = 0$ проективной фазовой плоскости (z, x, y) .

Атласы поведения траекторий. В таблицах 2 и 3 для каждого из случаев указаны номера рисунков, на которых построены карты атласов поведения траекторий системы (1') на сферах Пуанкаре и Бендиксона.

Проективные атласы систем, полученных из (1') при первом и втором проективных преобразованиях Пуанкаре, соответственно состоят из KP_2, KP_3, KP_1 и KP_3, KP_1, KP_2 карт проективного атласа системы (1').

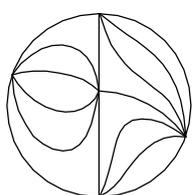


Рис. 1

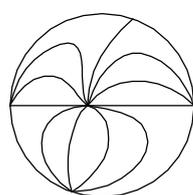


Рис. 2

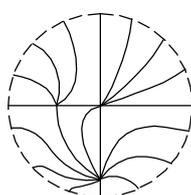


Рис. 3

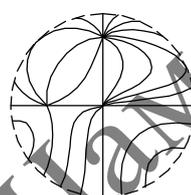


Рис. 4

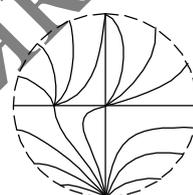


Рис. 5

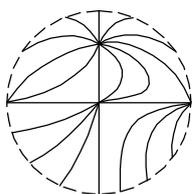


Рис. 6

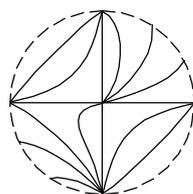


Рис. 7

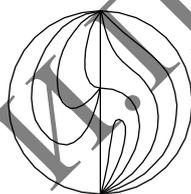


Рис. 8

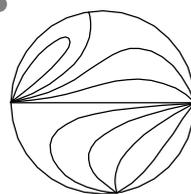


Рис. 9

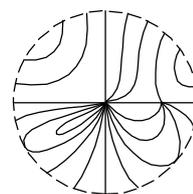


Рис. 10

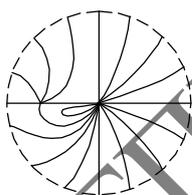


Рис. 11

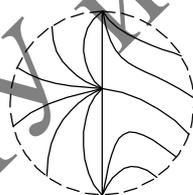


Рис. 12

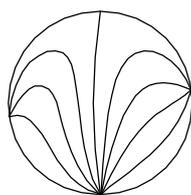


Рис. 13

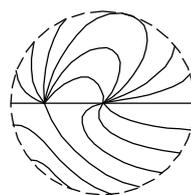


Рис. 14

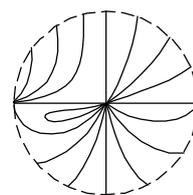


Рис. 15

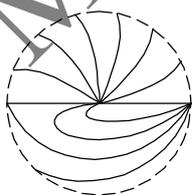


Рис. 16

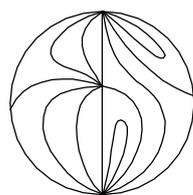


Рис. 17

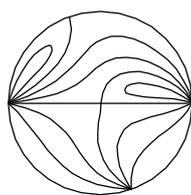


Рис. 18

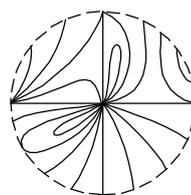


Рис. 19

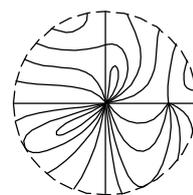


Рис. 20

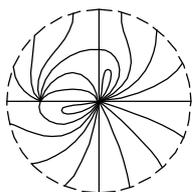


Рис. 21

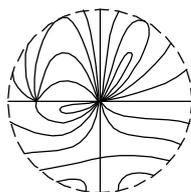


Рис. 22

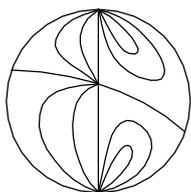


Рис. 23

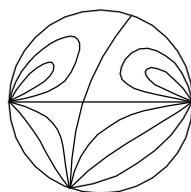


Рис. 24

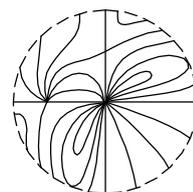


Рис. 25

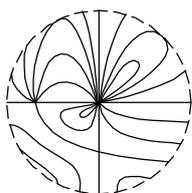


Рис. 26

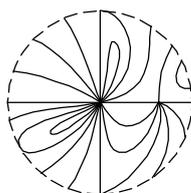


Рис. 27

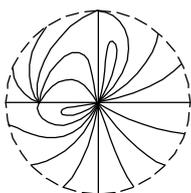


Рис. 28

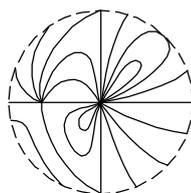


Рис. 29

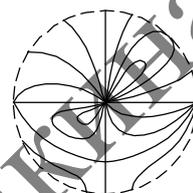


Рис. 30

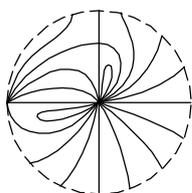


Рис. 31

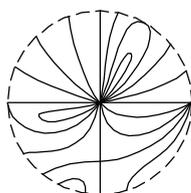


Рис. 32

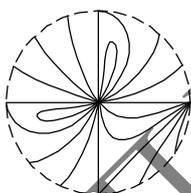


Рис. 33

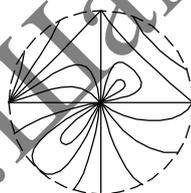


Рис. 34

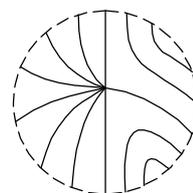


Рис. 35

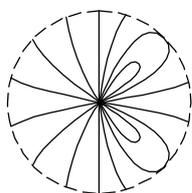


Рис. 36



Рис. 37

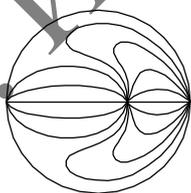


Рис. 38

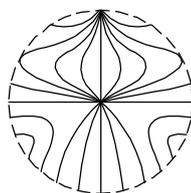


Рис. 39

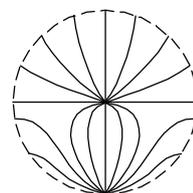


Рис. 40

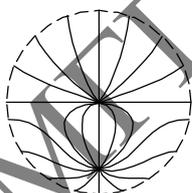


Рис. 41

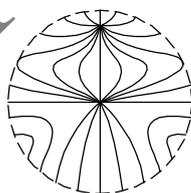


Рис. 42

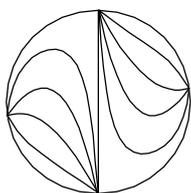


Рис. 43

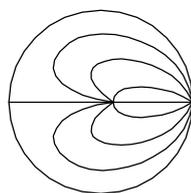


Рис. 44

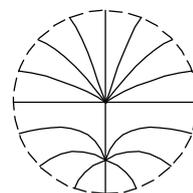


Рис. 45

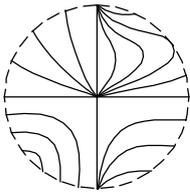


Рис. 46

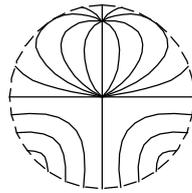


Рис. 47

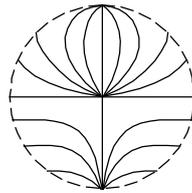


Рис. 48

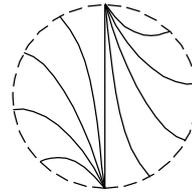


Рис. 49

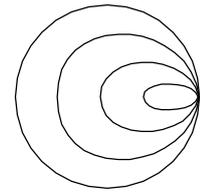


Рис. 50

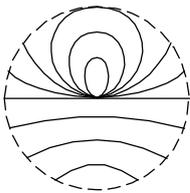


Рис. 51

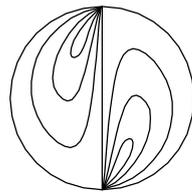


Рис. 52

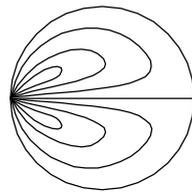


Рис. 53

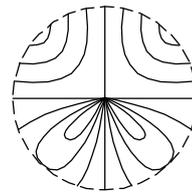


Рис. 54

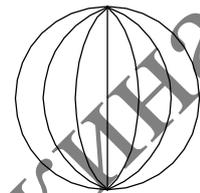


Рис. 55

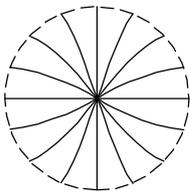


Рис. 56

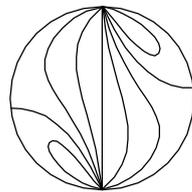


Рис. 57

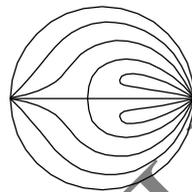


Рис. 58

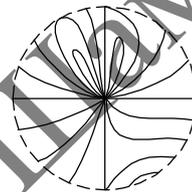


Рис. 59

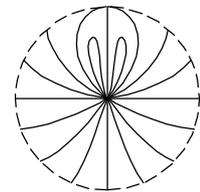


Рис. 60

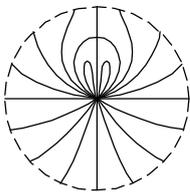


Рис. 61

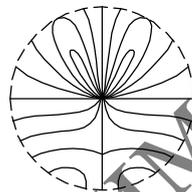


Рис. 62

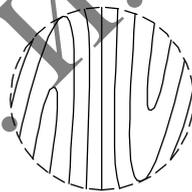


Рис. 63

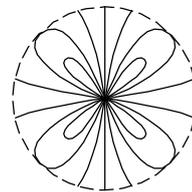


Рис. 64

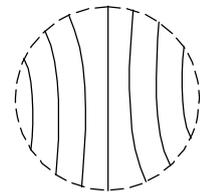


Рис. 65

В заключение коротко о результатах, полученных в статье:

- 1) построены проективные атласы поведения траекторий систем (1'), (2)–(5) на сфере Пуанкаре;
- 2) построены атласы поведения траекторий системы (1') на сфере Бендиксона.

Литература

1. Бирук, С.М. Качественное исследование в целом класса квадратичных систем с двукратным линейным частным интегралом / С.М. Бирук // Веснік ГрДУ. Сер. 2. – 2007. – № 3(57). – С. 52–57.
2. Горбузов, В.Н. Интегралы дифференциальных систем: монография / В.Н. Горбузов. – Гродно : ГрГУ, 2006. – 447 с.
3. Горбузов, В.Н. Траектории полиномиальной дифференциальной системы на сфере Пуанкаре / В.Н. Горбузов, И.В. Королько // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 845–846.
4. Горбузов, В.Н. Траектории дифференциальных систем на сфере Бендиксона / В.Н. Горбузов, И.В. Королько, В.Ю. Тыщенко // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 4. – С. 15–19.