УДК 519.240

Н. В. Сергиевич, М. Д. Юдин

СТРУКТУРА БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Характеристическая функция (х. ф.) $\varphi(t)$, $t=(t_1,t_2,\ldots,t_d)$ распределения случайного вектора ξ в R^d называется *безгранично делимой*, если для любого n существует х. ф. $f_n(t)$ такая, что

$$\varphi(t)=(f_n(t))^n. \tag{1}$$

И с. век. ξ, и его распределение, х. ф. которого обладает свойством (1), также называются *безгранично делимыми*.

Из (1) следует, что если с. век. ξ безгранично делим, то при любом n ξ представляется в виде суммы n независимых одинаково распределенных векторов с х. ф. $f_n(t)$.

Утверждается, что каждое безгранично делимое распределение есть свертка нормального распределения (которое может быть вырожденным) и конечного или счетного числа распределений Пуассона. В случае, когда безгранично делимое распределение имеет конечную дисперсию, для одномерного случая этот факт доказан в [1], для двумерного случая – в [2].

Для общего случая, т. е. когда безгранично делимый с. век. ξ d-мерный и, возможно, на обладает конечной дисперсией, доказательства данного факта нам найти не удалось. В данной работе восполняется этот пробел.

Каждая безгранично делимая х. ф. $\varphi(t)$, определяющая распределение размерности $d \ge 1$ с конечной или бесконечной дисперсией, представима в форме [3] $\varphi(t) = e^{\psi(t)}$, где

$$\psi(t) = \int_{R^d} \left(e^{i(t,x)} - 1 - \frac{i(t,x)}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \Pi(dx) + i(t,a) - \frac{(t,Bt^*)}{2}. \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_d) \in R^d$, $x^2 = (x,x) = |x|^2$, a – постоянный вектор в R^d, B – неотрицательно определенная матрица размерности $d \times d$, $\Pi(B)$ – ограниченная мера, определенная на множествах B борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(R^d)$, из области интегрирования исключен нуль-вектор, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_d) \in R^d$, t^* – вектор-столбец.

Представление (2) состоит из двух частей:

1. $\psi_1(t) = i(t,a) - \dfrac{(t,Bt^*)}{2}$. Это логарифм х. ф. нормального распределения с ковариационной матрицей B и математическим ожиданием (ось симметрии), равным вектору a. Плотность вероятности этого распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det B}} e^{-\frac{1}{2}\left(x-a, B^{-1}(x-a)^*\right)},$$

где B^{-1} – матрица, обратная матрице B, $(x-a, B^{-1}(x-a)^*)$ – скалярное произведение, $(x-a)^*$ – вектор-столбец.

2. $\psi_2(t) = \int_{R^d} \left(e^{i(t,x)} - 1 - \dfrac{i(t,x)}{1+x^2} \right) \dfrac{1+x^2}{x^2} \Pi(dx)$. Эту часть не без основания в литературе называют пуассоновской (см., например, [3, 4]). Мы покажем, что $\psi_2(t)$ – логарифм х. ф. свертки конечного или счетного числа распределений Пуассона.

Теорема. *Любое безгранично делимое распределение представимо в виде свертки нормального распределения (возможно, вырожденного) и конечного или счетного числа распределений Пуассона.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\varphi_\xi(t) = \exp \lambda (e^{i(t,x)} - 1),$$

где ξ – с. век. в R^d, x_0 – фиксированный вектор в R^d, $\lambda > 0$ – постоянное число, есть х. ф. распределения Пуассона на полупрямой (одномерное подпространство в R^d) $x = cx_0$, $c \ge 0$ – переменное число, т. е. распределения

$$P\{\xi = mx_0\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \ m = \overline{0, \infty}. \tag{3}$$

Действительно, по определению х. ф. для распределения (3) х. ф.

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(t,mx_0)} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(e^{i(t,x_0)}\lambda)^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i(t,x_0)}} = \exp \lambda (e^{i(t,x_0)} - 1).$$

Кроме того, если с. век. $\eta = \alpha\xi + b$, где α – число, b – вектор, то по свойству х. ф.

$$\varphi_\eta(t) = e^{\lambda\left(e^{i(t,x_0)}-1\right)} e^{i(t,b)}. \tag{4}$$

Здесь $\varphi_\eta(t)$ – х. ф. распределения Пуассона, у которого, в отличие от (3), изменен масштаб и которое идет вдоль полупрямой $x = c_1 x_0 + b$, c_1 – переменное число. Причем $c_1 \geq 0$, если $\alpha > 0$, и $c_1 \leq 0$, если $\alpha < 0$.

Поскольку интеграл в (2) существует, то он равен пределу своих интегральных сумм при неограниченном размельчении разбиения области в R^d с ее расширением на все пространство R^d.

Разобьем начальный d-мерный параллелепипед на n элементарных частей Δ_{nk}, $k = \overline{1,n}$, не захватывая нуль-вектор. В каждой элементарной части произвольно выбираем по одной d-мерной точке x_{nk}. Составим интегральную сумму интеграла из (2):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i(t,x_{nk})} - 1 - \frac{i(t,x_{nk})}{1+x_{nk}^2}\right)\frac{1+x_{nk}^2}{x_{nk}^2}\Pi(\Delta_{nk}). \tag{5}$$

Введем обозначения: $\lambda_{nk} = \dfrac{1+x_{nk}^2}{x_{nk}^2}\Pi(\Delta_{nk})$, $b_{nk} = \dfrac{x_{nk}\lambda_{nk}}{1+x_{nk}^2}$. После этого сумма (5) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_{nk}\left(e^{i(t,x_{nk})} - 1\right) + i(t,b_{nk})\right). \tag{6}$$

В (6) каждое слагаемое есть логарифм х. ф. вида (4) распределения Пуассона. Вся сумма (6) – логарифм х. ф. свертки n распределений Пуассона. Разумеется, некоторые из этих распределений могут оказаться вырожденными, а именно: вырожденными будут те распределения, для которых мера Π элементарных частей Δ_{nk} равна нулю: $\Pi(\Delta_{nk}) = 0$.

Если теперь неограниченно размельчать разбиение и неограниченно расширять по всем направлениям исходный параллелепипед, не захватывая нуль-вектор, то в пределе суммы (6) дадут интеграл

$$\psi_2(t) = \fint_{R^d}\left(e^{i(t,x)} - 1 - \frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\Pi(dx).$$

Следовательно, $\psi_2(t)$ – предел конечных сумм логарифмов х. ф. распределений Пуассона. Поэтому $e^{\psi_2(t)}$ – х. ф. свертки конечного или счетного числа распределений Пуассона. Поскольку

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t),$$

то теорема доказана.

Пример. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так называемые точечные носители пуассоновских вероятностей в R^d, $x_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$. Это значит, для τ-окрестностей $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\lim_{\tau \to 0}\frac{1+x_k^2}{x_k^2}\Pi(\delta_k) = \lambda_k, \quad k = \overline{1,n},$$

$$\lim_{\tau \to 0} \Pi\left(\bigcup_{k=1}^{n} \delta_k\right) = 0.$$

Кроме того, пусть

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k \lambda_k}{1 + x_k^2} = a.$$

Тогда

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e^{i(t, x_k)} - 1) - \frac{(t, Bt^*)}{2}. \qquad (7)$$

Это логарифм х. ф. свертки n распределений Пуассона с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и нормального распределения с ковариационной матрицей B.

Нетрудно составить плотность вероятности свертки, определяемой равенством (7). По правилу нахождения распределений сумм с. век. мы получим

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det B}} \sum_{m_k=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{m_k}}{m_k!} \right) e^{-\frac{(z, B^{-1} z^*)}{2}},$$

где B^{-1} – матрица, обратная матрице B, $z = x - \sum_{k=1}^{n} m_k x_k$.

Доказанная теорема позволяет судить о структуре распределения стохастически непрерывного d-мерного случайного процесса $S(t)$ в момент времени t. Поскольку $S(t)$ представимо в виде суммы равномерно бесконечно малых приращений, то применимы, вообще говоря, фундаментальные теоремы о сходимости распределений сумм с. век., полученные при решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм с. век. без предположения их независимости (см., например, [5, 6]). Они показывают, что в момент $t > 0$ случайный процесс $S(t)$ будет иметь безгранично делимое распределение.

Доказанная теорема указывает возможное направление моделирований стохастически непрерывных процессов любой конечной размерности.

Литература

1. Лоэв, М. Теория вероятностей / М. Лоэв. – М. : Изд. ЦЛ. – 1962. – 720 с.
2. Сергиевич, Н. В. Разработка методов применения предельных распределений сумм зависимых случайных векторов к моделированию стохастически непрерывных процессов : дис. … канд. физ.-мат. наук : 05.13.18. / Н. В. Сергиевич. – Минск, 2006. – 118 л.
3. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк [и др.]. – М. : Наука, 1985. – 640 с.
4. Круглов, В. М. Дополнительные главы теории вероятностей / В. М. Круглов. – М. : Высшая школа, 1984. – 264 с.
5. Юдин, М. Д. О предельных распределениях сумм зависимых векторов / М. Д. Юдин // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. - № 4. – С. 19–23.
6. Юдин, М. Д. О предельных распределениях сумм слабо зависимых векторов / М. Д. Юдин // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта. – 2004. – № 1(10). – С. 13–19.

Summary

It is shown that every infinitely divisible distribution is composition of normal distribution and finite or denumerable number of Poisson's distributions.

Поступила в редакцию 30.01.07