К. Ю. ПИЛЯК, В. В. ШЕПЕЛЕВИЧ
МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ПОДБОР УСКОРЯЮЩЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ОБЛАСТИ СВЕТОВОГО ПУЧКА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

В исследованиях по теории распространения световых пучков в фоторефрактивных кристаллах (см., например, [1]), получено уравнение для определения переопределенного потенциала $\varphi(x, y)$ электрического поля, создаваемого световыми пучками в стационарном состоянии динамического процесса:

$$\nabla^2\varphi + \nabla\ln(1+I)\,\nabla\varphi = E_0\frac{\partial}{\partial x}\ln(1+I) + \frac{k_BT}{e}\left(\nabla^2\ln(1+I) + (\nabla\ln(1+I))^2\right). \quad (1)$$

В случаях, когда значение E_0 напряженности внешнего электрического поля достаточно велико, последним слагаемым в (1) можно пренебречь. Тогда потенциал определяется по приближенной формуле

$$\nabla^2\varphi + \frac{1}{1+I}\nabla(1+I)\cdot\nabla\varphi = E_0\frac{1}{1+I}\frac{dI}{dx}. \quad (2)$$

После преобразований и введения обозначений

$$\alpha = \frac{1}{1+I}\frac{\partial I}{\partial x}, \qquad \beta = \frac{1}{1+I}\frac{\partial I}{\partial y} \quad (3)$$

уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \alpha E_0 = 0. \quad (4)$$

Переопределенный потенциал обращается в нуль на границах кристалла. Этот факт определяет граничные условия для уравнения (4).

Полученное уравнение относится к дифференциальным уравнениям с частными производными эллиптического типа. Для численного решения поставленной задачи используются различные методы, в частности, метод Зейделя и метод релаксации.

Основная идея метода Зейделя заключается в следующем: составляется сеточное уравнение для искомой функции. С учетом граничных условий вычисляется значение функции в каждой точке, при этом в сеточное уравнение подставляются уже найденные на текущей итерации значения функции в соседних точках. Это позволяет получить более точные результаты [2].

Сеточное уравнение для поставленной задачи имеет вид

$$\varphi_{ij}{}^{(k+1)} = \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha h}{8}\right)\varphi_{i+1,j}{}^{(k)} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha h}{8}\right)\varphi_{i-1,j}{}^{(k+1)} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\beta h}{8}\right)\varphi_{i,j+1}{}^{(k)} + \\ + \left(\frac{1}{4} - \frac{\beta h}{8}\right)\varphi_{i,j-1}{}^{(k+1)} - \frac{h^2}{4}\alpha E_0, \tag{5}$$

где h – шаг разбиения сетки,

φ_{lm} – значение искомой функции в точке (x_l, y_m),

k – номер итерации.

После проведения вычисления значений функции φ методом Зейделя, нами исследована зависимость точности решения задачи от количества итераций. Так, при количестве итераций $k = 100$ решение далеко от точного. Увеличение количества итераций приближает значения функции к точным значениям. При $k = 600, k = 700, k = 1000$ кривые функции на двумерном графике практически совпадают, что свидетельствует о том, что полученные решения максимально приближены к точному решению (рисунок 1).

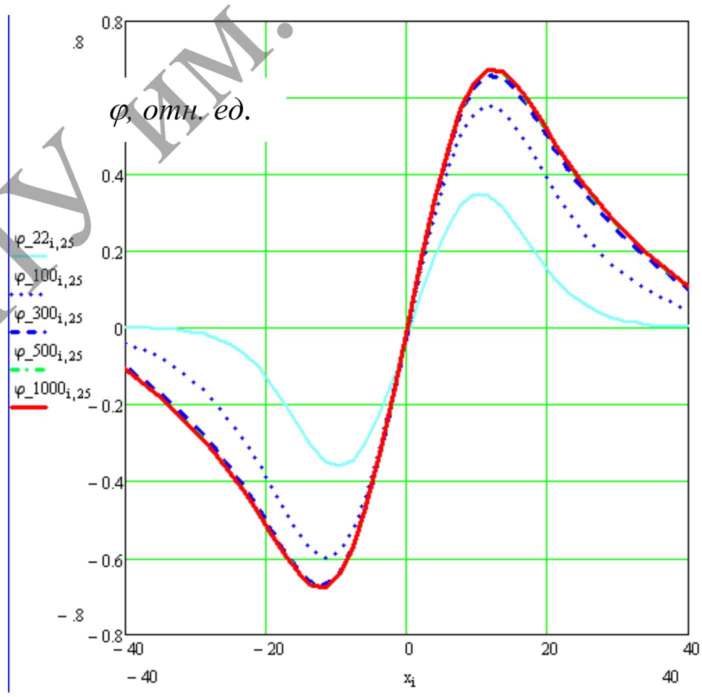

Рисунок 1. – Графики решений уравнения методом Зейделя при различном количестве итераций

Увеличение количества итераций приводит к увеличению точности полученного решения, однако снижает эффективность вычислений. Уменьшить количество итераций метода Зейделя можно введением в него параметра релаксации ω [2]. Расчетная формула в данном случае имеет вид

$$u_{ij}^{(k+1)} = u_{ij}^{(k)} + \omega\left(\widehat{u_{ij}}^{(k+1)} - u_{ij}^{(k)}\right), \tag{6}$$

где $\widehat{u_{ij}}^{(k+1)}$ – результат вычисления по формуле Зейделя. Коэффициент релаксации ω выбирался равным 0,7 для $k = 22$ и $k = 500$ и 1,5 – для $k = 100$.

При реализации метода релаксации при количестве итераций $k = 500$ графики функции $\varphi(x)$ данным методом практически совпадают с графиками, полученными методом Зейделя при количестве итераций $k = 1000$ (рисунок 2). Из рисунков 1 и 2 видно, что при одинаковом количестве шагов метод релаксации дает результаты, более близкие к истинному значению, чем метод Зейделя. Данный факт позволяет использовать метод релаксации в различных исследованиях для более эффективного решения уравнений с частными производными эллиптического типа.

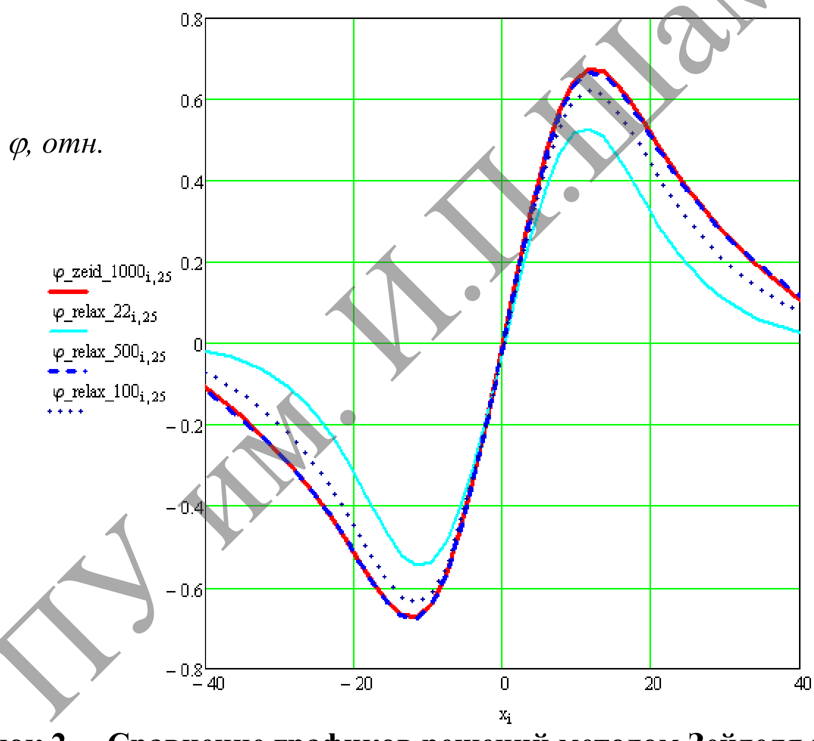

Рисунок 2. – Сравнение графиков решений методом Зейделя и методом релаксации

ЛИТЕРАТУРА

1. Interaction of two-dimensional spatial incoherent solitons in photorefractive medium / W.Krolikowski [и др.] // Appl. Phys. B. – 1999. – Vol. 68. – P. 975–982

2. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов: учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.