

О.В. СТАРОВОЙТОВА, Л.А. ИВАНЕНКО, С.Р. БОНДАРЬ
МГПУ им. И.П. Шаямкина (г. Мозырь, Беларусь)

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Интегрирование функций одной переменной один из самых важных и основных разделов в математическом анализе. Основная задача при нахождении интеграла функции одной переменной – это правильно выбрать метод интегрирования. Существует достаточно много методов интегрирования: непосредственное интегрирование функций, метод введения новой переменной, метод занесения функции под знак дифференциала, интегрирование по частям и т.д. Однако есть функции, нахождение интегралов от которых можно вычислять различными способами. В этом случае важно не только найти значение интеграла, но и использовать при этом наиболее рациональный метод.

Рассмотрим на примере нахождения интеграла вида $\int \sqrt{4 - x^2} dx$.

а) с помощью метода интегрирования по частям:

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{4-x^2} \quad du = \frac{-x dx}{\sqrt{4-x^2}} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right| = x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{4-x^2} - \int \frac{(-x^2 + 4 - 4) dx}{\sqrt{4-x^2}} = x\sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} dx + \int \frac{4 dx}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} dx + 4 \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

Переносим выражение $-\int \sqrt{4-x^2} dx$ в левую часть, получим:

$$2 \int \sqrt{4-x^2} dx = x\sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2} + C$$

откуда получаем: $\int \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C.$

Видим, что вычисление интеграла свелось к решению уравнения.

б) рассмотрим как **интеграл от дифференциального бинома**:

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} 4-x^2 = t^2 x^2; \\ 4 = x^2 + t^2 x^2 \\ 4 = x^2(1+t^2) \\ x = \sqrt{\frac{4}{1+t^2}} \\ dx = -\frac{2t\sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)^2} dt \end{array} \right| ; = \int \sqrt{t^2 x^2} \left(-\frac{2t\sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)^2} \right) dt =$$

$$= \int t \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \left(-\frac{2t\sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)^2} \right) dt = -4 \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

С помощью данной замены мы осуществили переход подынтегральной функции от иррациональной функции к дробно-рациональной. Для того чтобы решить $\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$, рассмотрим

табличный интеграл $\int \frac{dt}{(1+t^2)}$ и для его решения воспользуемся методом решения по частям:

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{1+t^2} = u \quad dt = dv \\ -\frac{2t}{1+t^2} = du \quad t = v \end{array} \right| = \frac{t}{1+t^2} + \int \frac{2t}{(1+t^2)^2} t dt = \frac{t}{1+t^2} + 2 \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

Получили:

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + 2 \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \quad \arctgt = \frac{t}{1+t^2} + 2 \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

Решая последнее уравнение, получаем:

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \left(\arctgt - \frac{t}{1+t^2} \right).$$

Тогда искомым интеграл:

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = -4 \cdot \frac{1}{2} \left(\arctgt - \frac{t}{1+t^2} \right) + C = -2 \left(\arctgt - \frac{t}{1+t^2} \right) + C, \text{ где } t = \sqrt{\frac{4-x^2}{x^2}}.$$

Видим, при вычислении интеграла сочетали различные подходы: метод замены, метод интегрирования по частям и т.д.

в) с помощью **тригонометрической замены переменной**:

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \\ \cos t = \sqrt{4-x^2} \end{array} \right| = \int 2\sqrt{4-4\sin^2 t} \cos t dt = \int 4\cos^2 t dt = 4 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$
$$= 2 \int dt + 2 \int \cos 2t dt = 2t + \sin 2t + C = 2t + \sin 2t + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \sin(2 \arcsin \frac{x}{2}) + C.$$

Данный метод является более компактным и рациональным. Однако он требует знания тригонометрических формул.

Анализируя все три подхода при вычислении интеграла, можно сделать вывод, что первые два подхода являются громоздкими, а наиболее рациональным методом интегрирования в данном случае является метод интегрирования с помощью тригонометрической замены переменной.

МГТУ им. И.П.Шамякина