УДК 517.917

В. В. Шкут

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВИДЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

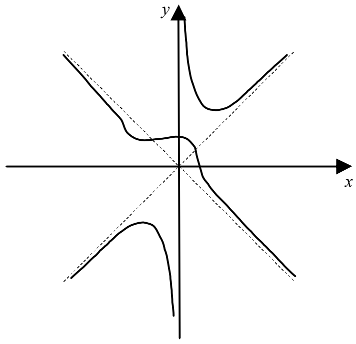
Пусть для системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + \sum_{i+j=2}^{3} a_{ij} x^i y^j, \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=2}^{3} b_{ij} x^i y^j, \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, алгебраическая кривая [1, 48]

$$\omega(x, y) \equiv x^3 - xy^2 - 2py + q = 0, \tag{2}$$

где $4p^2 > q^2 + 1$, $p < 0$, $q < 0$, $p \neq 2q$, является частным интегралом. Кривая (2) состоит из двух гиперболических и одной прямолинейной ветвей и имеет вид:



Лемма. Для того чтобы кривая (2) была частным интегралом системы (1), необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + \frac{q}{2p^2}xy - \frac{1}{2p}x^3 + \frac{1}{2p}xy^2 \equiv P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{3q}{4p^2}x^2 - \frac{q}{4p^2}y^2 \equiv Q(x,y). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для доказательства леммы следует воспользоваться тождеством [2]: если кривая $\omega(x,y)=0$ – частный интеграл системы $\frac{dx}{dt}=P(x,y), \frac{dy}{dt}=Q(x,y)$, где $P(x,y), -Q(x,y)$ – многочлены степени n по x и y с действительными коэффициентами, то

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}P(x,y)+\frac{\partial\omega}{\partial y}Q(x,y)\equiv\omega(x,y)F(x,y). \tag{4}$$

Здесь $F(x,y)$ – многочлен степени $n-1$ по x и y. В нашем случае тождество (4) будет таким:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}P(x,y)+\frac{\partial\omega}{\partial y}Q(x,y) \equiv \frac{1}{2p}\left(y^2-3x^2\right)\omega(x,y). \tag{5}$$

Найдем особые точки системы (3) в конечной части плоскости, которые, как следует из тождества (5), могут лежать на линиях $y^2-3x^2=0$ и $\omega(x,y)=0$. Приравнивая правые части системы (3) к нулю, получим систему уравнений для отыскания особых точек системы (3) в конечной части плоскости:

$$\left.\begin{aligned} &px^3-pxy^2-qxy-2p^2y=0, \\ &3x^2-y^2=0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Решая систему (6), получим особые точки системы (3) в конечной части плоскости:

$$x_1=0,\ \ y_1=0; \tag{7}$$

$$x_2=\frac{-q\sqrt{3}+\sqrt{3q^2-16p^3\sqrt{3}}}{4p};\ \ y_2=x_2\sqrt{3}; \tag{8}$$

$$x_3=\frac{-q\sqrt{3}-\sqrt{3q^2-16p^3\sqrt{3}}}{4p};\ \ y_3=x_3\sqrt{3}. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что $x_2 < 0$ и $x_3 > 0$ и что особые точки (7)–(9) лежат на прямой $y = x\sqrt{3}$.

Найдем теперь особые точки системы (3) в бесконечной части плоскости, используя преобразования Пуанкаре [3, 113]:

$$x = \frac{1}{z},\ y = \frac{u}{z} \text{ и } x = \frac{v}{z},\ y = \frac{1}{z},\ \frac{dt}{z^2} \to dt.$$

Применяя последовательно эти преобразования к системе (3), получим системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2p}u + \frac{3q}{4p^2}z - \frac{1}{2p}u^3 - \frac{3q}{4p^2}u^2 z - u^2 z^2 \equiv \overline{P}(u,z), \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{2p}z - \frac{1}{2p}u^2 z - \frac{q}{2p^2}uz^2 - uz^3 \equiv \overline{Q}(u,z), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{2p}v + \frac{3q}{4p^2}vz + z^2 - \frac{1}{2p}v^3 - \frac{3q}{4p^2}v^3 z \equiv \overline{\overline{P}}(v,z), \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{q}{4p^2}z^2 - \frac{3q}{4p^2}v^2 z^2 \equiv \overline{\overline{Q}}(v,z). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Полагая в правых частях системы (10) $z = 0$ и приравнивая их к нулю, получаем уравнение $u^3 - u = 0$ для определения особых точек $(u;\ 0)$. Из уравнения следует, что $u_1 = 0,\ u_{2,3} = \pm 1$.

Отсюда особые точки:

$$u_1 = 0,\ \ z = 0; \tag{12}$$

$$u_{2,3} = \pm 1,\ \ z = 0. \tag{13}$$

Полагая в правых частях системы (11) $v = z = 0$, видим, что «концы» оси Oy являются особой точкой системы (3).

Выпишем характеристические числа особых точек (7)–(9), (12), (13) и для «концов» оси Oy.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \tag{7'}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2p^2}\sqrt{3qx_1\left(qx_1 + 4p^2\right)}; \tag{8'}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2p^2}\sqrt{3qx_2\left(qx_2 + 4p^2\right)}; \tag{9'}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2p}; \tag{12'}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{p},\ \ \lambda_2 = 0. \tag{13'}$$

Для «концов» оси Oy характеристические числа

$$\lambda_1 = \frac{1}{2p},\ \ \lambda_2 = 0. \tag{14}$$

По характеристическим числам (8'), (9'), (12') заключаем, что особые точки (8), (9), (12) будут, соответственно, фокусом или центром, четырехсепаратрисным седлом и узлом.

Выясним характер сложных особых точек (7), (13) и «концов» оси Oy. Исследуем точку (7). Система (3) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = y + \xi(x, y), \ \frac{dy}{dt} = \eta(x, y).$$

Находим решение уравнения $y + \xi(x, y) = 0$ относительно $y = \varphi(x)$ в виде $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots$.

Подставив $y = \varphi(x)$ в уравнение, получим тождество $\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \frac{q}{2p^2} x \times$ $\times \left(\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\right) - \frac{1}{2p} x^3 + \ldots + \frac{1}{2p} x\left(\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\right)^2 \equiv 0$. Отсюда $\alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = \frac{1}{2p}, \ldots$.

Следовательно, $y \equiv \varphi(x) = \frac{1}{2p} x^3 + \ldots$. Далее находим $f(x) = \eta(x, \varphi(x)) = \frac{3q}{4p^2} x^2 - \ldots \equiv a x^{\alpha} + \ldots$

и $g(x) \equiv \xi'_x(x, \varphi(x)) + \eta'_y(x, \varphi(x)) = -\frac{3}{2p} x^2 + \ldots = b x^{\beta} + \ldots$. Видим, что $a = \frac{3q}{4p^2} < 0, \ \alpha = 2$ – четное, $b = -\frac{3}{2p} > 0, \ \beta = 2$, при этом $\alpha < 2\beta + 1$. Согласно [4, 128], точка (7) – двухсепаратрисное седло.

Выясним теперь характер особых точек (13). В системе (10) сделаем замену переменных $u \to u \pm 1, \ z \to z$ и замену времени $-\frac{1}{p} dt \to dt$. Получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u \pm \frac{3}{2} u^2 \pm \frac{3q}{2p} uz + pz^2 + \frac{1}{2} u^3 + \frac{3q}{2p} u^2 z \pm 2puz^2 + pu^2 z^2 \equiv u + \eta(u, z), \\ \frac{dz}{dt} &= \pm uz \pm \frac{q}{2p} z^2 + \frac{1}{2} u^2 z + \frac{q}{2p} uz^2 \pm pz^3 + puz^3 \equiv \xi(u, z). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Здесь $\xi(0, z) \not\equiv 0$, но $\frac{\eta(0, z)}{\xi(0, z)} \not\to 0$ при $z \to 0$. Добьемся этого. Находим решение уравнения $u + \eta(u, z) = 0$ в виде $u = \alpha_2 z^2 + \ldots \equiv \varphi(z)$. Подставив в уравнение $u = \varphi(z)$, получим $\alpha_2 = -p, \ldots$. Тогда $u = -pz^2 + \ldots \equiv \varphi(z)$. Преобразуя систему (15) с помощью подстановки $u \to \varphi(z) + u$, получим систему

$$\frac{du}{dt} = u + \eta_1(u, z), \ \frac{dz}{dt} = \xi_1(u, z), \tag{16}$$

где $\xi_1(0, z) \equiv \xi(\varphi(z), z) = \pm \frac{q}{2p} z^2 + \ldots \equiv a z^{\alpha} + \ldots, \ a \neq 0, \ \alpha = 2$ и $\eta_1(0, z) \equiv -\varphi'(z) \cdot \xi_1(0, z) =$ $= \pm q z^3 + \ldots \equiv b z^{\beta} + \ldots, \ b \neq 0, \ \beta > \alpha$. Здесь $\frac{\eta_1(0, z)}{\xi_1(0, z)} \to 0$ при $z \to 0$. Так как $\alpha = 2$ – четное, то, согласно [4, 109], точки (13) – седло-узлы. Аналогично показывается, что «концы» оси Oy также являются седло-узлом.

Из вышеизложенного следует

Теорема. Система (3) имеет:

1) в конечной части плоскости двухсепаратрисное седло (7), фокус или центр (8), четырехсепаратрисное седло (9);

2) в бесконечной части плоскости узел (12), седло-узлы (13) и «концы» оси Oy .

Литература

1. Савелов, А. А. Плоские кривые / А. А. Савелов. – М. : Изд. физ.-мат. лит., 1960. – 294 с.

2. Еругин, Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую / Н. П. Еругин // ПММ : в 16 т. – М., 1952. – Т. 16, вып. 6. – С. 659–670.

3. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М. : Наука, 1976. – 496 с.

4. Андреев, А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений / А. Ф. Андреев. – Минск : Высш. шк., 1979. – 136 с.

Summary

For one cubic two-dimensional system having particular integral in the form of an algebraic curve of the third order, all special points are found and their character is found out.

Поступила в редакцию 25.05.06.