А.Е. ЗАГОРСКИЙ, М.В. МАЛАЩЕНКО, В.В. ШЕПЕЛЕВИЧ
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

МОДЕЛЬ «КОЛЕСО И КАМЕНЬ»

Стоя у дороги, мы можем наблюдать, как от обода колеса велосипеда или покрышки автомобиля отрываются кусочки земли, грязи, капли воды. Куда будут лететь эти предметы? Или, более научно, куда будет направлен вектор скорости летящих частиц? Жизненный опыт и здравый смысл приводят нас к однозначному ответу: «Частички, отрывающиеся от колеса, будут лететь назад, в сторону, противоположную движению велосипеда, автомобиля». Проверим это утверждение на соответствие законам физики.

Для нашей задачи удобно воспользоваться математическим аппаратом параметрических функций. Например, движение материальной точки М на ободе колеса описывается в параметрическом виде следующими соотношениями:

$$x_M = R\,\varphi - R\sin(\varphi), \qquad (1)$$
$$y_M = R\,(1 - \cos(\varphi)).$$

В качестве параметра здесь выступает угол поворота колеса φ (примем для определенности, что начальное значение $\varphi = 0$). Величина R в соотношениях (1) характеризует радиус колеса. До момента отрыва точки координаты x_M и y_M, непрерывно меняясь, будут описывать кривую, называемую циклоидой. Графическое представление траектории движения исследуемой точки может иметь вид, показанный на рисунке 1.

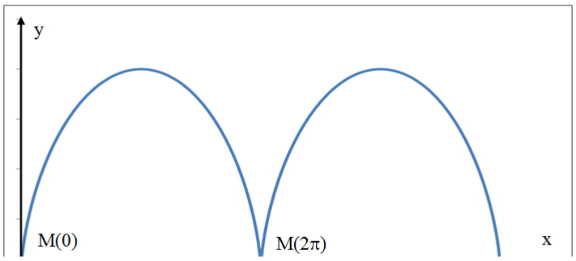

Рисунок 1. – Циклоида

Отметим, что до настоящего момента рассматривается движение точки, еще не оторвавшейся от колеса. Как только это событие произойдет, мы перейдем к задаче о движении тела, брошенного под углом к горизонту.

Координаты тела в момент отрыва определяют соотношения (1), нам необходимо определить его начальную скорость. Эта величина будет векторной, с помощью (1) найдем проекции вектора скорости на координатные оси. Примем, что ось OX расположена горизонтально и направлена в сторону перемещения колеса, а ось OY перпендикулярна ей.

Найдем проекции вектора скорости движущейся точки на координатные оси OX и OУ. Для этого вычислим производные выражений, входящих в (1) по переменной φ:

$$v_x(\varphi) = R\,(1 - \cos(\varphi)), \quad v_y(\varphi) = R\sin(\varphi). \tag{2}$$

Вообще говоря, система уравнений (2) является уравнением окружности радиуса R, заданной в параметрическом виде. В нашем случае окружность будет касаться начала координат и лежать в положительной полуплоскости относительно оси OY. Если взять все возможные векторы скорости, получающиеся из системы (2), и построить их так, чтобы начало каждого вектора было в начале координат, то кривая на рисунке 2 покажет геометрическое место точек концов таких векторов.

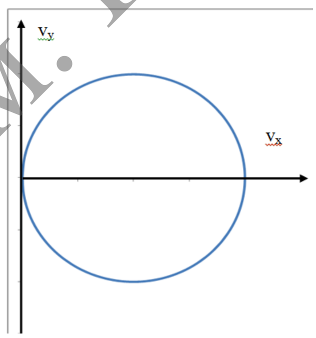

Рисунок 2. – Изменение вектора скорости

Как легко заметить, для любого угла φ вектор скорости всегда направлен в положительную полуплоскость. Таким образом, частичка, оторвавшаяся от вращающегося колеса, всегда летит в направлении движения колеса, а в некоторых случаях будет обгонять само колесо.

Провести самостоятельное исследование описанных эффектов также можно онлайн по адресу [1]. Читатель может в браузере с помощью мышки выбрать точку отрыва камня и посмотреть динамическую анимацию полета материальной точки (рисунок 3). Модель создана с использованием языка разметки HTML5, основные подходы создания модели описаны в работе [2].

Рисунок 3. – Внешний вид компьютерной модели

ЛИТЕРАТУРА

1. Модель «Колесо и камень» [Электронный ресурс] / http://infor.mspu.by – Режим доступа: http://infor.mspu.by/?p=77. – Дата доступа: 03.03.2015.

2. Загорский, А.Е. Построение интерактивных моделей в HTML5 // А.Е. Загорский, М.В. Малащенко, В.В. Шепелевич // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам: материалы научно-практической интернет-конференции (25 – 28 марта 2014 г.) – Мозырь: УО МГПУ, 2014. – С.175 – 177.