

С. Н. Гуз, М. Д. Юдин

## К ИССЛЕДОВАНИЮ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ НА ПЛОСКОСТИ

В работах [1—3] метод, разработанный нами для решения центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых случайных величин [4], распространяется на суммы зависимых случайных векторов. В этих работах формулы Колмогорова и Леви-Хинчина, дающие логарифмы характеристических функций (х. ф.) предельных распределений сумм независимых случайных величин, обобщаются на суммы зависимых случайных векторов в  $R^d$ ,  $d \geq 1$ .

В [4; 5] рассмотрены применения обобщенных формул Колмогорова и Леви-Хинчина к сумме зависимых случайных величин, в [6] — к сумме зависимых случайных векторов. Как показано в [6], задание пуассоновских условий на плоскости существенно не однозначно.

В данной работе рассматривается случай, когда носителем пуассоновской вероятности на плоскости служат некоторые кривые, при этом получаемые плотности вероятностей предельных распределений сумм векторов мы выражаем через криволинейные интегралы. Подробно изучается случай, когда носитель пуассоновской вероятности — эллипс.

Приведенные результаты можно рассматривать как моделирование диффузионного процесса с учетом воздействия некоторых внешних факторов и зависимости его приращений. В этом случае случайные вектора — приращения движения диффузирующей частицы на плоскости, пуассоновская вероятность отражает внешние воздействия, а параметры, вообще говоря, — функции времени. Такой подход к моделированию диффузионных процессов рассматривался нами в [7].

Путем компьютерного варьирования параметров мы выясняем их влияние на поверхность предельной плотности вероятности суммы случайных векторов. Это позволяет ставить вопрос о прогнозировании эволюции случайного процесса.

Пусть  $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^n$ ,  $n = 1, \infty$ , — система серий двумерных векторов с ограниченными дисперсиями,

$\xi_{ns} = (\xi_{ns}^{(1)}, \xi_{ns}^{(2)})$ ,  $t = (t_1, t_2)$ ,  $z = (x, y)$ ,  $S_n = \sum_{s=1}^n \xi_{ns}$ ,  $M \xi_{ns}^{(i)} = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $B_n = \|b_{n(i,j)}\|$  — матрица, в

которой  $b_{n(i,j)} = \sum_{0 \leq s-p \leq m_n} M \left( \xi_{ns}^{(i)} \xi_{np}^{(j)}; |\xi_{ns}^{(i)}| \leq \varepsilon \wedge |\xi_{np}^{(j)}| \leq \varepsilon \right)$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $m_n \leq m_0 n^{1/\rho}$ ,  $\rho > 0$ ,  $m_0$  —

постоянная. Наконец, пусть  $K_n(z) = \sum_{s=1}^n M(\xi_{ns}^2; \xi_{ns} \leq z)$ , причем  $\xi_{ns} \leq z$  означает, что  $\xi_{ns}^{(1)} \leq x$ ,

$\xi_{ns}^{(2)} \leq y$  [8].

Как показано в [1], при довольно естественных ограничениях и  $m_n$  — зависимости, если

$K_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.v.} K(z)$ ,  $B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ , то сумма  $S_n$  будет иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х.ф. которого выражается по формуле:

$$\psi(t) = \int_{R^2} (e^{i(t,z)} - 1 - i(t,z)) \frac{1}{|z|^2} dK(z) - \frac{(t, Bt^*)}{2}, \quad (1)$$

где из области интегрирования исключён нуль-вектор,  $(t, z)$ ,  $(t, Bt^*)$  — скалярные произведения,  $t^*$  — вектор-столбец.

Пусть  $\xi_{ns} = \eta_{ns} - M\eta_{ns}$ ,  $s = \overline{1, n}$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , и пуассоновская вероятность сосредоточена в  $\tau$ -окрестности  $\delta$  точки  $z_0 = (x_0, y_0)$ , т. е. при любом  $\tau \in (0, |z_0|)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n P\{\xi_{ns} \in \delta\} = \lambda$ .

Кроме того, если  $\delta_0$  —  $\tau$ -окрестность точки  $(0, 0)$ , то при любом  $\tau \in (0, |z_0|)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \int_{\delta_0 \cup \delta} z^2 P\{\xi_{ns} < z\} = 0.$$

Тогда, если  $\sum_{s=1}^n M\eta_{ns} \rightarrow \lambda z_0$ , то, как показано в [6], из (1) будет следовать, что плотность

вероятности предельного распределения суммы  $\sum_{s=1}^n \eta_{ns}$  будет иметь вид

$$p(z) = \frac{e^{-\lambda} \sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left( (z - mz_0), B^{-1}(z - mz_0)^* \right)\right\}, \quad (2)$$

где  $z = (x, y)$  — точка плоскости  $xOy$ .

Пусть  $\rho(x_0, y_0)$  — плотность вероятности появления точки  $z_0 = (x_0, y_0)$ , на некоторой кривой  $\Gamma$ . Тогда по формуле полной вероятности из (2) получаем

$$p(z) = \frac{e^{-\lambda} \sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \int_{\Gamma} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left( (z - mz_0), B^{-1}(z - mz_0)^* \right)\right\} \rho(u, v) dt, \quad (3)$$

где  $d\ell$  — дифференциал дуги кривой  $\Gamma$ ,  $(u, v)$  — текущие точки кривой  $\Gamma$ ,  $z_0 = (u, v)$ . В (3)  $\lambda$  может зависеть от точки  $(u, v)$  на  $\Gamma$ .

Если в (2) перейти к полярным координатам  $z_0 = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  и положить, что  $\alpha$  — независимая случайная величина, например, равномерно распределённая на отрезке  $[0, 2\pi]$ , то по формуле полной вероятности

$$p(z) = \frac{e^{-\lambda} \sqrt{|B^{-1}|}}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left( (z - mz_0), B^{-1}(z - mz_0)^* \right)\right\} d\alpha. \quad (4)$$

Именно эта плотность (4) была исследована в [9] при постоянных  $\lambda$  и  $r$ , т. е. когда носителем пуассоновской вероятности служила окружность радиуса  $r$  с центром в начале координат.

Если в (4) положить  $z_0 = z = (a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ , то носителем пуассоновской вероятности будет эллипс, с полуосями длиной  $a$  и  $b$ . Здесь исследуется этот случай. Путем компьютерного варьирования выявляется влияние параметров на вид поверхности плотности (4), которые представлены на рисунках 1—3 ( $\|c_{ij}\| = B^{-1}$ ).

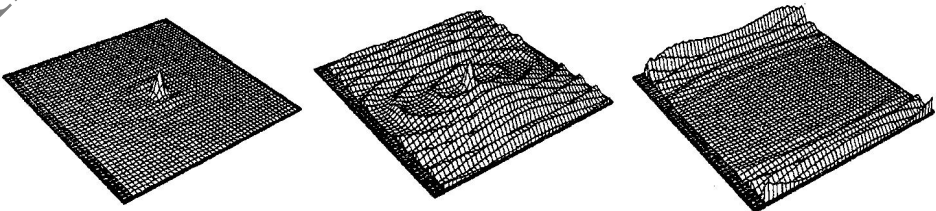


Рис. 1. Влияние параметра  $\lambda$  (1.5; 5; 15) на вид поверхности плотности при постоянных эксцентриситете  $e=0.9$  и коэффициентах  $c_{11} = c_{22} = 25$ ,  $c_{21} = c_{12} = 0.2$

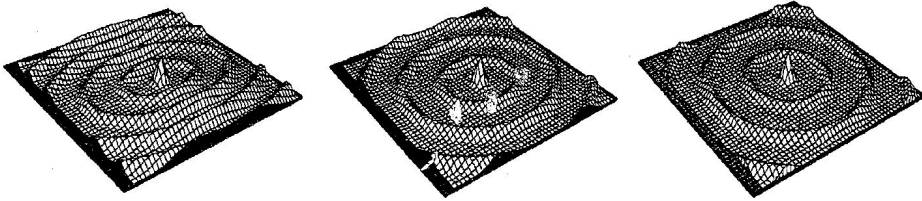


Рис. 2. Влияние эксцентриситета  $e$  (0.8; 0.5; 0.1) на вид поверхности плотности при постоянных параметре  $\lambda=5$  и коэффициентах  $c_{11}=c_{22}=25$ ,  $c_{21}=c_{12}=0.2$

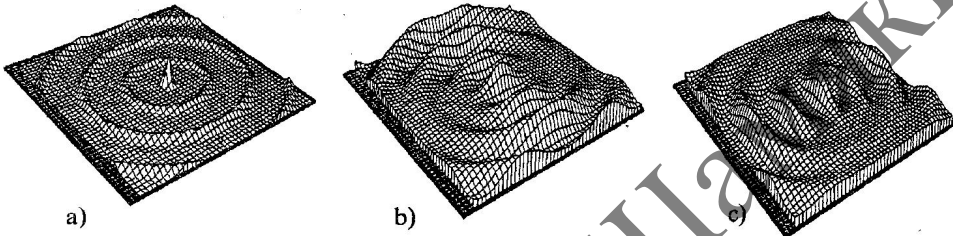


Рис. 3. Влияние коэффициентов

a)  $c_{11}=50$ ,  $c_{21}=c_{12}=1$ ,  $c_{22}=50$ ;

b)  $c_{11}=2$ ,  $c_{21}=c_{12}=0.2$ ,  $c_{22}=14$ ;

с)  $c_{11}=14$ ,  $c_{21}=c_{12}=0.5$ ,  $c_{22}=2$

на вид поверхности плотности при эксцентриситете  $e=0.5$  и параметре  $\lambda=5$ .

### Литература

1. Юдин М. Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1994. — №3. — С. 31—35.
2. Юдин М. Д. Об обобщении формулы Леви-Хинчина на суммы зависимых векторов // Изв. вузов. Математика. 1996. — № 4. — С.75—80.
3. Юдин М. Д. О предельном распределении сумм зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. — № 4. — С.19—23.
4. Юдин М. Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. — Минск: "Университетское", 1990. — 254 с.
5. Юдин М. Д. Примеры применений обобщенной формулы Колмогорова к суммам зависимых случайных величин // Изв. вузов. Математика. 1980. — № 9. — С. 65—70.
6. Юдин М. Д. Применение обобщенной формулы Колмогорова к суммам зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. — № 3. — С. 28—31.
7. Юдин М. Д. Один подход к моделированию диффузионного процесса // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1994. — № 2. — С. 58—60.
8. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977.
9. Гуз С.Н. О моделировании пуассоновских процессов на плоскости // VII Белорусская математическая конференция. Тезисы докладов. Часть 3. — Минск, 1996. — С.4—5.

### Summary

Some random processes with dependent increments on a plane are estimated.