МАТЭМАТЫКА

УДК 519.240

М. Д. Юдин

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ВЕКТОРОВ

Центральная предельная проблема теории вероятностей (ц. пр. п.) состоит в следующем: найти класс предельных распределений сумм равномерно бесконечно малых случайных величин и условия сходимости распределений этих сумм к каждому представителю найденного класса.

Аналогично эта проблема формулируется для сумм случайных векторов.

В отличие от прежних результатов, полученных Колмогоровым, Хинчиным, Леви и др. (см., например, [1—3]) для сумм независимых величин, нами ц. пр. п. теории вероятностей решается для сумм зависимых величин и сумм зависимых векторов. Показано, что при довольно естественных ограничениях зависимости класс предельных распределений сумм равномерно бесконечно малых зависимых величин совпадает с классом безгранично делимых распределений. Найдены условия сходимости распределений сумм зависимых величин к каждому представителю этого класса [4—8]. Аналогичные результаты получены для сумм зависимых случайных векторов [9—11].

Оказалось, что логарифм характеристических функций (х. ф.) предельных распределений сумм зависимых величин, или векторов, выражается по формулам, обобщающим формулы Колмогорова и Леви–Хинчина [4—12]. Эти обобщенные формулы отражают влияние зависимости между величинами, векторами, на предельное распределение их сумм. Получены примеры применения этих формул, подчеркивающие существенное влияние зависимости между слагаемыми на предельные распределения их сумм [13—17].

Для приложений важно не только найти предельное распределение суммы случайных величин, векторов, но и оценить скорость сходимости распределений сумм к предельному распределению. В [18–21] распределения сумм зависимых величин аппроксимируются безгранично делимыми распределениями, представленными по обобщённым формулам Колмогорова и Леви–Хинчина, что оценку скорости сходимости распределений сумм зависимых величин сводит к оценке скорости сходимости распределений сумм одинаково распределённых независимых величин.

На базе теоретических результатов нами моделируются некоторые случайные процессы деформаций, разрушений и диффузий, независимость приращений которых не предполагается [15; 16; 22].

1^0. Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, — система серий зависимых случайных величин, $S_{n(s,n)}=\xi_{n(s+1)}+\ldots+\xi_{nn}$, M_{ns} — s — алгебра, порождённая x_{ns}. Нами вводятся функции [4; 5]

$$f_{ns}(t,M_{ns})=\frac{M\left(\exp itS_{n(s,n)}/M_{ns}\right)}{M\left(\exp itS_{n(s,n)}\right)}, \qquad \varphi_{ns}(t)=M(e^{it\xi_{ns}}f_{ns}(t,M_{ns})),$$

изучаются свойства этих функций. В частности, $\varphi_n(t)=\prod_{s=1}^{n}\varphi_{ns}(t)$, где $\varphi_n(t)$ — х. ф. суммы $S_n=S_{n(o,n)}$

В [6—8] находятся условия, в которых логарифм предельной х. ф. суммы S_n в случае ограниченных дисперсий представляется по формуле:

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}d_x\gamma(t,x)+ita(t), \tag{1}$$

где $\gamma(t,x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}M\left(\xi_{ns}^2 f_{ns}(t,M_{ns});\xi_{ns}\le x\right)$, $a(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}M\left(\xi_{ns}f_{ns}(t,M_{ns})\right)$, и в случае неограниченных дисперсий — по формуле:

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d_x\zeta(t,x)+it\alpha(t), \tag{2}$$

где $\zeta(t,x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}M\left(\frac{\xi_{ns}^2}{1+\xi_{ns}^2}f_{ns}(t,M_{ns});\xi_{ns}\le x\right)$, $\alpha(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}M\left(\frac{\xi_{ns}}{1+\xi_{ns}^2}f_{ns}(t,M_{ns})\right)$.

Формула (1) — обобщение формулы Колмогорова, (2) — Леви-Хинчина, полученных ими для независимых слагаемых.

В случае ограниченных дисперсий доказывается (см., например, [4]).

Теорема 1. *Пусть система серий* $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, *удовлетворяет условию равномерного сильного перемешивания (р. с. п.)* [23], *коэффициент которого* $\beta(\tau)=o(\tau^{-3-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$, *найдутся постоянные* H_1, H_2 *и* n_0 *такие, что при* $n\ge n_0$

$$\max_s \mathrm{M}\xi_{ns}^2 \le \frac{H_1}{n}, \qquad \max_{r,s\ne q} \mathrm{M}|\xi_{ns}\xi_{nr}\xi_{nq}| \le \frac{H_2 h(n)}{n^{3/2}},$$

где $0\le r-s\le k_n=\left[n^{1/4-\rho/2}\right]$, $0<q-s\le\left[n^{1/4-\rho/2}\right]$, $0<\rho\le\frac{\varepsilon}{2(7+2\varepsilon)}$, $h(n)$ — *медленно меняющаяся функция* [23]. *Тогда, если при* $n\to\infty$

$$\sum_{s=1}^{n}\mathrm{M}(\xi_{ns}^2;\xi_{ns}\le x)\xrightarrow{\text{с.л.}}K(x), \qquad \sum_{i\ne j}\mathrm{M}\xi_{ni}\xi_{nj}\to a,$$

то сумма S_n *будет иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х. ф. которого*

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}\,dK(x)-\frac{at^2}{2}. \qquad (3)$$

Аналогичная теорема верна для случая $m_n=\left[m_0 n^{1/8-\rho}\right]$ — зависимости [23], где m_o — любое постоянное число, $0<\rho\le\frac{1}{8}$. Получены различные вариации подобных теорем [4].

Формула (3) — обобщение формулы Колмогорова на случай зависимых слагаемых.

Представление (3) можно записать в виде:

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{1}{x^2}\,dK(x)-\frac{\sigma t^2}{2}, \qquad (4)$$

здесь из области интегрирования исключен ноль, $a\sigma^2=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\sum M\left(\xi_{ns}\xi_{np};|\xi_{ns}|\le\varepsilon,|\xi_{np}|\le\varepsilon\right)$ где суммирование ведётся при $0\le|s-p|\le k_n$ в случае р. с. п. и $0\le|s-p|\le m_n$ в случае m_n – зависимости.

Формула (4) — также обобщение формулы Колмогорова.

2^0. В [4; 6–8; 13; 24] ц. пр. п. теории вероятностей решается для случая неограниченных дисперсий.

Пусть $\{X_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, — система серий случайных величин, существование математических ожиданий (м. о), которых не предполагается, $a_{ns}=M(X_{ns};|X_{ns}|\le\tau)$, $\tau>0$, $\eta_{ns}=X_{ns}-a_{ns}$,

$$\overline{X}_{ns}=\begin{cases}X_{ns}, & X_{ns}\le H,\\ 0, & X_{ns}>H,\end{cases}\quad H\ge\tau,\quad \overline{\eta}_{ns}=\overline{X}_{ns}-a_{ns},\ M_{ns}\text{ — }\sigma\text{-алгебра, порождённая } X_{ns},\ S_n=\sum_{s=1}^{n}\eta_{ns}.$$

Справедлива [4; 7; 24]

Теорема 2. *Пусть система серий* $\{\eta_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, $m_n=m_0 n^{1/8-\rho}$ — *зависимая,* $0<\rho\le1/8$, m_0 — *любое постоянное число, кроме того, найдутся постоянные* $\tau>0$ *и* n_o *такие, что при* $H\ge\tau$ *и* $n\ge n_o$ *будут выполняться условия:*

$$\sup_{p,s}\max P\{X_{np}|>H/\mathrm{M}_{ns}\}\le\frac{g(H)}{n}, \qquad \max_s \mathrm{M}\eta_{ns}^2\le\frac{H_1 h(n)}{n},\ \max_{r,q,s}\mathrm{M}|\overline{\eta}_{np}\overline{\eta}_{nr}\overline{\eta}_{ns}|\le\frac{H_2 h(n)}{n^{3/2}}$$

где $0<|r-s|\le\left[m_0 n^{1/4-\rho}\right]$, $0\le|p-s|\le\left[m_0 n^{1/4-\rho}\right]$, $g(H)\to0$ *при* $H\to\infty$, H_1 *и* H_2 — *постоянные, могущие зависеть от H. Тогда, если*

$$\sum_{s=1}^{n}M\left\{\frac{\eta_{ns}^2}{1+\eta_{ns}^2};\eta_{ns}\le x\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{вп}}\Psi(x),\ \lim_{H\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}M\frac{\overline{\eta}_{ns}}{1+\overline{\eta}_{ns}^2}=a_1,\ \lim_{n\to\infty}\sum_{r\ne q}M\left(\eta_{nr}\eta_{nq};|X_{nr}|\le\tau,|X_{nq}|\le\tau\right)=a_2,$$

где $|a_1+ia_2|<\infty$, *то сумма* S_n *будет иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х. ф. которого*

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi(x)+ita_1-\frac{a_2t^2}{2}. \tag{5}$$

Аналогичная теорема верна для случая р. с. п, коэффициент которогоf $\beta(q)=o(q^{-3-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$. В [25] приведены подобные теоремы бех ограничений условных вероятностей.

Представление (5) можно записать в форме:

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi(x)+ita_1-\frac{\sigma^2t^2}{2}, \tag{6}$$

здесь из области интегрирования исключен ноль, $\sigma^2=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum M\left(\eta_{nr}\eta_{np};|\eta_{nr}|\le\varepsilon,|\eta_{np}|\le\varepsilon\right)$, где суммирование ведется при $0\le|r-p|\le m_n$ в случае m_n – зависимости; и $0\le|r-p|\le k_n$, в случае р. с. п.

Формулы (5) и (6) — обобщения формулы Леви–Хинчина. В [7; 8; 14; 24] даны примеры применений формул (5) и (6), в частности, для нормированных величин.

3^0. В [9–11] ц. пр. п. теории вероятностей решается для сумм зависимых случайных векторов.

Пусть $\xi_{ns}=\left(\xi_{ns}^{(1)},\dots,\xi_{ns}^{(d)}\right)$ — d — мерный случайный вектор, $s=\overline{1,n}$, $n=\overline{1,\infty}$, $t=(t_1,\dots,t_d)$, $x=(x_1,\dots,x_d)$, (x,t) — скалярное произведение, матрица $B_n=\|b_{n(i,j)}\|$,

$b_{n(i,j)}=\sum_{0\le|s-p|\le m_n}M\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)};|\xi_{ns}|\le\varepsilon,|\xi_{np}|\le\varepsilon\right)$ в случае m_n — зависимости, $0\le|s-p|\le k_n$ в случае р. с. п.

Доказывается, что в случае ограниченных дисперсий в условиях, аналогичных условиям теоремы 1, предельное распределение суммы $S_n=\sum_{s=1}^{n}\xi_{ns}$, $M\xi_{ns}=0$ будет безгранично делимым, логарифм х. ф. которого

$$\psi(t)=\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-i(t,x)\right)\frac{1}{x^2}dK(x)-\frac{(t,Bt^*)}{2}, \tag{7}$$

где $K(x)\overset{сл.}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}M(\xi_{ns}^2;\xi_{ns}\le x)$, $B=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}B_n$, t^* – вектор-столбец, а из области интегрирования исключён нуль–вектор, $\xi_{ns}\le x$ означает, что $\xi_{ns}^{(i)}\le x_i$, $i=\overline{1,d}$.

В случае неограниченных дисперсий в условиях, аналогичным условиям теоремы 2, логарифм предельной х. ф. суммы $S_n=\sum_{s=1}^{n}\xi_{ns}$ получен в форме:

$$\psi(t)=\int_{R^d}\left(e^{i(t,x)}-1-\frac{i(t,x)}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi(x)+i(t,A)-\frac{(t,\beta t^*)}{2}, \tag{8}$$

где, при покоординатном усечении векторов X_{ns} и покоординатной центрированности (см. п. 2^0) $\eta_{ns}^{(i)}=x_{ns}^{(i)}-a_{ns}^{(i)}$, $\eta_{ns}=(\eta_{ns}^{(1)},\dots,\eta_{ns}^{(d)})$,

$$\Psi(x)=\lim_{H\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}M\left(\frac{\bar{\eta}_{ns}^2}{1+\bar{\eta}_{ns}^2};\quad \eta_{ns}\le x\right),\qquad A=\lim_{H\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}M\frac{\eta_{ns}}{1+\bar{\eta}_{ns}^2}, \tag{9}$$

β — предел той же матрицы, что и в (7), но для векторов $\eta_{ns}=x_{ns}-a_{ns}$, $a_{ns}=(a_{ns}^{(1)},\dots,a_{ns}^{(d)})$. При этом существование пределов вида (9) позволяет не накладывать ограничений на условные вероятности.

Представления (7) и (8) получены для случаев m_n–зависимости и выполнения р.с.п. Формула (7) — обобщение формулы Колмогорова, (8) — формулы Леви–Хинчина.

4^0. В [18–21] х. ф. сумм зависимых величин аппроксимируются безгранично делимыми х. ф., оценивается модуль разности между соответствующими функциями распределения (ф. р.). Тем самым оценка скорости сходимости сумм зависимых величин сводится к оценке скорости сходимости сумм одинаково распределённых независимых величин. Так, в случае существования м. о. случайных величин ξ_{ns}, $m_n=[m_o n^{1/8-\rho}]$ — зависимости, $0<\rho\le 1/8$ х. ф. суммы $S_n=\sum_{s=1}^{n}\xi_{ns}$ $M\xi_{ns}=0$, аппроксимируются х. ф. $\exp\psi_n(t)$, где

$$\psi_n(t)=-\frac{(\sigma_n^2+a)t^2}{2}+\int\limits_{|x|\ge\varepsilon_n}(e^{itx}-1-itx)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi_n(x),$$

$$a_n=\sum_{0<|s-p|\le m_n} M\left(\xi_{ns}\xi_{np};|\xi_{ns}|\le\tau,|\xi_{np}|\le\tau\right),\tau>o,$$

$$\sigma_n^2=\sum_s M(\xi_{ns}^2;|\xi_{ns}|<\varepsilon_n),\quad 0<\varepsilon_n\le cn^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\rho}.$$

Показано, что если $\exp\psi_n(t)$ принадлежит классу L, то в условиях, аналогичных условиям теоремы 1, $|\varphi_n(t)-\exp\psi_n(t)|\le\frac{|t|B(t)}{n^{1/2-2\rho}}$, где $\varphi_n(t)$ – х.ф. суммы S_n, $B(t)$ — многочлен второй степени относительно $|t|$ с коэффициентами, разве лишь убывающими с ростом n, и если $F_n(x)$ — ф. р. с х. ф. $\exp\psi_n(t)$, $G_n(x)$ – ф. р. суммы S_n, $F'(x)\le N$, то $\sup_x|F_n(x)-G_n(x)|\le Cn^{-1/8+\rho/2}$ C=const.

Аналогичные оценки найдены для случая ограниченных дисперсий и случая неограниченных м. о.

5^0. Решение ц.пр.п. теории вероятностей показало, что:

1. При естественных ограничениях зависимости между случайными величинами, векторами, в общих условиях, обеспечивающих их равномерную бесконечную малость, предельные распределения сумм случайных величин, векторов принадлежат *классу безгранично делимых распределений*. Логарифмы х. ф. предельных распределений определяются обобщёнными формулами Колмогорова и Леви–Хинчина.

2. Зависимость между случайными величинами, векторами отражается в предельных распределениях их сумм появлением, вообще говоря, дополнительного *нормального компонента, порождаемого корреляцией слагаемых*.

3. Для нахождения предельных распределений сумм зависимых случайных величин, в условиях полученных теорем, *достаточно найти х. ф. предельного распределения суммы, предполагая, что слагаемые независимы, затем умножить полученную х. ф. на* $\exp\left(-\frac{at^2}{2}\right)$ *где а — предел суммы ковариаций слагаемых*, или их усечений в случае неограниченных дисперсий. Аналогично для сумм зависимых векторов.

4. При а>0 корреляция слагаемых "сглаживает" предельные распределения их суммы. *При а>0 все предельные распределения сумм случайных величин абсолютно непрерывны.* Аналогично для сумм зависимых случайных векторов.

5. Распределения сумм зависимых случайных величин аппроксимируются "сопровождающими" безгранично делимыми распределениями, при конечном числе слагаемых, выраженными "промежуточными" обобщёнными формулами Колмогорова и Леви–Хинчина, что, в частности, *сводит нахождение скорости сходимости распределений сумм зависимых величин к нахождению скорости сходимости распределений сумм независимых одинаково распределённых величин.*

6. Полученные результаты дают доступный математический аппарат для моделирования *реальных случайных процессов* как линейных, так и многомерных, т. е. процессов с зависимыми приращениями.

Следует добавить, что попытки решения ц. пр. п. другими авторами [26–30] содержали существенные недостатки: неестественные ограничения, выраженные в терминах условных вероятностей; их результаты не отражают влияния зависимости слагаемых на предельные распределения их сумм, полученные ими теоремы вряд ли применимы в приложениях; решение ц. пр. п. сводилось к не менее сложным задачам. Краткое содержание этих результатов можно найти в [4].

Литература

1. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М., 1949. — 264 с..
2. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. — М.: Наука,1972. — 414 с.
3. Лоэв М. Теория вероятностей. — М., 1962. — 719 с..
4. Юдин М. Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. — Мн.: Университетское, 1990. — 254 с.
5. Юдин М. Д. О центральной предельной проблеме теории вероятностей для сумм зависимых случайных величин // Сб. "Теория вер. и матем. статистика", Киев. — 1972. — № 4. — С. 195—211.
6. Юдин М. Д. Об обобщении формулы Леви–Хинчина на суммы величин, удовлетворяющих условию перемешивания // Сб. "Случайные процессы и статистич. выводы", Ташкент, Из–во "ФАН", 1975. Вып. 5. — С. 187—198.
7. Юдин М. Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм f(n)–зависимых величин // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. — 1976, т. XXI, № 10. — С. 1335—1346.
8. Юдин М. Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм случайных величин, удовлетворяющих условию перемешивания // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. – 1980, т. XXV, № 8. — С. 1249—1257.
9. Юдин М. Д. О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.–мат. навук. — 1994. — № 3 — С. 31—35.
10.Юдин М. Д. Об обобщении формулы Леви–Хинчина на суммы зависимых векторов// Изв. вузов. Математика. — 1996. — № 4. — С. 1—6.
11. Юдин М. Д. О предельных распределениях сумм зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.–мат. навук. — 1997. — № 4 — С. 19—23.
12.Юдин М. Д. Примеры применения обобщённой формулы Колмогорова к суммам зависимых случайных величин // Изв. вузов, Математика. — 1980. — № 9. — С. 65—70.
13. Юдин М. Д. Об обобщениях формул Колмогорова и Леви–Хинчина на суммы зависимых величин // ДАН БССР. — 1986, т. 30, № 1. — С. 29—31.
14. Юдин М. Д. Применение обобщённой формулы Леви–Хинчина к суммам нормированных величин // Сб. "Предельные теоремы и матем. статистика", Ташкент, Из–во "ФАН",— 1976. — С. 177—181.
15.Юдин М. Д. Сложное пуассоновское распределение в теории деформаций и разрушений // Изв. вузов. Математика. — 1993. — № 6. — С. 62—64.
16.Юдин М. Д. Один подход к моделированию диффузионного процесса// Весці АН Беларусі. Сер. фіз.–мат. навук. — 1994. — № 2 — С. 58—60.
17.Юдин М. Д. Применение обобщённой формулы Колмогорова к суммам зависимых векторов // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.–мат. навук. — 1997. — № 3 — С. 28 — 31.
18.Юдин М. Д. Об аппроксимации распределений сумм m_n— зависимых случайных величин распределениями из класса L // Деп. Изв. АН БССР. Сер. физ.–мат. наук. — 1987. — № 4. — С. 117. Рег. № 3587 — Вж. 19.05.86.
19.Юдин М. Д. Замечание к аппроксимации распределений суммы зависимых величин безгранично делимыми распределениями // Изв. АН БССР. Сер. физ.–мат. наук. — 1987. — № 2. — С. 38—41.
20. Юдин М. Д. К аппроксимации распределений сумм m_n–зависимых величин распределениями из класса L // Изв. вузов, Математика. — 1989. — №4.— С.83–88.
21. Юдин М. Д. Об аппроксимации распределений сумм зависимых случайных величин распределениями из класса L // Весці АН БССР. Сер. фіз.–мат. навук. — 1991.— № 1. — С. 35—41.
22. Башмаков В. И., Чикова Т. С., Юдин М. Д. Распределение трещин по размерам в кристаллических телах // ДАН БССР. — 1983, т. XXVII, № 4. — С. 326—328.
23. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. — М.: Наука, 1965. — 524 с..
24. Юдин М. Д. О предельных распределениях сумм зависимых случайных величин с неограниченными дисперсиями // ДАН БССР.—1984, т. 28. № 6. — 496—498.
25. Юдин М. Д. К уточнению условий сходимости распределений сумм зависимых случайных величин // Изв. вузов. Математика. —1989. — №10. — С. 87—89.
26.Dvoretzky A. Central limit theorems for dependent random variables// Actes du Congres international du math. (1970). Paris. — 1971. — P. 565—570.
27.Jegenathan P. A solution of the martingale central limit Problem // Sankhya Indian J. Statist. – 1982, A44, №3. — p. 299 - 318.

28. Гирко В. Л. Предельные теоремы для функций случайных величин. — Киев: Вища шк., 1987. — 207с.

29. Blok B. H. Error Estimation for a limit theorem for dependent random variables// The Annals of math. statistics. — 1970, Vol. 41, №. — P. 1334—1338.

30. Klopotowski A. Limit theorems for sums of dependent random vectors in R^d// Rozpz. mat. — 1977, Vol. 151. — 62p.

Summary

In the article the review of outcomes of the writer about the solution of a central limit problem of probability theory for the sums of dependent random variables and vectors is given.