

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№3 (24) 2015

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместитель главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)

Редакционная коллегия:

В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружичкая (Беларусь)

Адрес редакции:

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82

e-mail: pfmt@gsu.by

Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)

Editorial board:

V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:

F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (24) 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Гиргель С.С. Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью	7
Колядко Ж.В., Шепелевич В.В., Давыдовская В.В. Распространение сингулярных пучков в кубическом оптически активном фоторефрактивном кристалле	10
Матук Е.В., Гайда Л.С., Гузатов Д.В. Движение металлической наночастицы вблизи поверхности пузырька воздуха в жидкости под действием силы светового давления	17
Овсюк Е.М. Электромагнитное поле в формализме Майораны – Оппенгеймера во Вселенной анти де Ситтера	21
Руденков А.С. Влияние концентрации металла на фазовый состав, структуру и свойства углерод-металлических покрытий	26
Стаськов Н.И., Парашков С.О., Шилов А.В., Кречетень Н.А. Аналитическое решение обратной задачи спектрофотометрии для поглощающего слоя на поглощающей подложке с диэлектрическим слоем	33
Юревич Ю.В., Юревич В.А. Модуляция оптического излучения при отражении тонкой пленкой плотной резонансной среды	38

МАТЕМАТИКА

Белоконь Л.М. К вопросу о пересечениях максимальных θ -подгрупп конечных групп	46
Белокурский М.С. Задача Еругина о существовании нерегулярных решений линейной системы в одном случае ненулевого среднего периодического коэффициента	51
Бородич Р.В., Быков С.Н. Об операторном обобщении подгруппы Фраттини	55
Каморников С.Ф. Разрешимые ЕТ-функторы	59
Мироненко В.В. О периодических решениях дифференциального уравнения с дробно-линейной правой частью	63
Сазонова А.Т. О результатах исследования упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости	66
Скиба А.Н. О σ -свойствах конечных групп II	70
Старовойтов А.П., Кечко Е.П. О локализации нулей аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций	84

ИНФОРМАТИКА

Быховцев В.Е., Прокопенко Д.В., Цурганова Л.А. Расчет РИТ-свай по первому предельному состоянию	90
Жданов О.Н., Соколов А.В. Алгоритм построения оптимальных по критерию нулевой корреляции нечетных блоков замен	94
Маслович С.Ф., Горбач А.Б., Галушко В.Н., Дробов А.В. Web-приложение электрических расчетов	98

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 03.09.15. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.

Усл. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 10,9. Тираж 100 экз. Заказ № 501.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2015
© Проблемы физики, математики и техники, 2015
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2015

УДК 539.12

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ФОРМАЛИЗМЕ МАЙОРАНЫ – ОППЕНГЕЙМЕРА ВО ВСЕЛЕННОЙ АНТИ ДЕ СИТТЕРА

Е.М. Овсюк

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE MAJORANA – OPPENHEIMER FORMALISM IN THE ANTI DE SITTER UNIVERSE

E.M. Ovsyuk

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus

Построены точные решения уравнений Максвелла со сферической симметрией на фоне осциллирующей во времени Вселенной анти де Ситтера. Использован 3-мерный комплексный формализм Майораны – Оппенгеймера, обобщенный на псевдоримановы модели пространства-времени в соответствии с тетрадным рецептом. Установленный характер зависимости решений от времени приводит к независимости вектора Пойнтинга для построенных решений от времени, т. е. факт изменения геометрии пространства во времени невозможно установить, измеряя плотность потока энергии электромагнитного поля.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, тетрадный формализм, Вселенная анти де Ситтера, нестатические координаты, комплексный формализм Майораны – Оппенгеймера, точные решения.

Exact solutions with spherical symmetry of the Maxwell equations in the oscillating anti de Sitter Universe are constructed. 3-Dimensional complex formalism by Majorana – Oppenheimer, generalized to pseudo-Riemannian space-time models in accordance with the tetrad method, is applied. The established dependence of the constructed solutions on the time variable leads to independence of the Poynting vector on time. This means that the change in time of the anti de Sitter geometry cannot be seen by measuring the energy flow density.

Keywords: Maxwell's equations, tetrad formalism, anti de Sitter Universe, non-static coordinates, complex formalism of the Majorana – Oppenheimer, exact solutions.

Введение

Цель настоящей работы – получение решений уравнений Максвелла в осциллирующей во времени Вселенной де Ситтера с метрикой

$$dS^2 = dt^2 - \cos^2 t \times [dr^2 + \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]; \quad (0.1)$$

стоящее в квадратных скобках выражение представляет метрику гиперболической модели Лобачевского в сферической системе координат (используем безразмерные координаты).

Решение системы уравнений Максвелла является намного более сложной задачей, чем, например, решение уравнения скалярного поля или уравнения Дирака. Сложность задачи связана главным образом с большим числом полевых переменных: шестью при описании электромагнитного поля антисимметричным тензором второго ранга и десятью при использовании набора из тензора и 4-мерного электромагнитного вектора. В работе будем пользоваться формулировкой уравнений Максвелла, восходящей к комплексному формализму Римана – Зильберштейна – Оппенгеймера – Майораны [1]–[10] и обобщенной для применения в произвольном псевдоримановом пространстве-времени в соответствии с тетрадным рецептом Тетроде – Вейля – Фока – Иваненко [11]–[15]. Относительная простота

этого формализма связана с тем, что вещественное электромагнитное 6-компонентное тензорное поле при этом описывается 3-мерным комплексным вектором. Это уменьшает количество уравнений и тем самым облегчает процедуру построения аналитических решений уравнений Максвелла.

1 Разделение переменных

Исходим из уравнений Максвелла в матричной тетрадной форме в римановом пространстве в формализме Майораны – Оппенгеймера (используем обозначения из [15])

$$\alpha^c \left(e_{(c)}^p \partial_p + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc} \right) \Psi = 0,$$

$$\alpha^0 = -iI,$$

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{vmatrix}.$$

В более детальной записи это уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} & -i \left(e_{(0)}^p \partial_p + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{ab0} \right) \Psi + \\ & + \alpha^k \left(e_{(k)}^p \partial_p + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abk} \right) \Psi = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Приведем явный вид трех основных матриц α^k и трех генераторов S^k в декартовом базисе [15]:

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S^1 = j^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{pmatrix}, \quad S^2 = j^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix},$$

$$S^3 = j^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать уравнение (1.1) в нестатических координатах пространства анти де Ситтера (0,1); при этом используем тетраду

$$e_{(0)}^\alpha = (1, 0, 0, 0),$$

$$e_{(1)}^\alpha = \left(0, 0, \frac{1}{\cos t \sinh r}, 0 \right),$$

$$e_{(2)}^\alpha = \left(0, 0, 0, \frac{1}{\cos t \sinh r \sin \theta} \right),$$

$$e_{(3)}^\alpha = \left(0, \frac{1}{\cos t}, 0, 0 \right).$$

Уравнение (1.1) в выбранных координатах и тетраде принимает следующий явный вид:

$$\left\{ -i \frac{\partial}{\partial t} - i \tan t (\alpha^1 S^1 + \alpha^2 S^2 + \alpha^3 S^3) + \frac{1}{\cos t} \left(\alpha^3 \partial_r + \frac{\alpha^1 S^2 - \alpha^2 S^1}{\tanh r} \right) + \frac{1}{\cos t \sinh r} \Sigma_{0\phi} \right\} \Psi = 0,$$

где зависящий от угловых переменных оператор $\Sigma_{0\phi}$ определен равенством

$$\Sigma_{0\phi} = \left(\alpha^1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \alpha^2 \frac{\partial}{\sin \theta} + S^3 \cos \theta \right). \quad (1.2)$$

При разделении переменных удобно иметь матрицу j^{12} диагональной. Этого можно добиться с помощью преобразования к циклическому базису [15].

$$\Psi' = U_4 \Psi, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix},$$

$$U \tau_1 U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = \tau'_1, \quad j'^{23} = s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau'_1 \end{pmatrix},$$

$$U \tau_2 U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau'_2, \quad j'^{31} = s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau'_2 \end{pmatrix},$$

$$U \tau_3 U^{-1} = -i \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \tau'_3, \quad j'^{12} = s_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau'_3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha'^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & -i \\ -1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha'^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & -i \\ -i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha'^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i \end{pmatrix}$$

Уравнение (1.2) примет в циклическом базисе тот же вид (для краткости штрихи будем опускать).

Диагонализуем на решениях квадрат и третью проекцию полного момента электромагнитного поля, этому отвечает подстановка для полевой функции

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1(t, r) D_{-1} \\ \varphi_2(t, r) D_0 \\ \varphi_3(t, r) D_{+1} \end{pmatrix},$$

где использованы краткие обозначения для D -функций Вигнера $D_\sigma = D_{-m, \sigma}^j(\phi, \theta, 0)$, $\sigma = -1, 0, +1$; j, m определяют квадрат и третью проекцию полного момента.

С применением рекуррентных соотношений для функций Вигнера [14]

$$\partial_0 D_{-1} = \frac{1}{2}(a D_{-2} - v D_0),$$

$$\frac{m - \cos \theta}{\sin \theta} D_{-1} = \frac{1}{2}(a D_{-2} + v D_0),$$

$$\partial_0 D_0 = \frac{1}{2}(v D_{-1} - v D_{+1}),$$

$$\frac{m}{\sin \theta} D_0 = \frac{1}{2}(v D_{-1} + v D_{+1}),$$

$$\partial_0 D_{+1} = \frac{1}{2}(v D_0 - a D_{+2}),$$

$$\frac{m + \cos \theta}{\sin \theta} D_{+1} = \frac{1}{2}(v D_0 + a D_{+2}),$$

$$v = \sqrt{j(j+1)}, \quad a = \sqrt{(j-1)(j+2)}$$

получаем систему уравнений в переменных (t, r) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{\tanh r} \right) \varphi_2 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} (\varphi_1 + \varphi_3) = 0,$$

$$-\left(\cos t \frac{\partial}{\partial t} - 2 \sin t \right) \varphi_1 -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r} \right) \varphi_1 - \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} \varphi_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(\cos t \frac{\partial}{\partial t} - 2 \sin t\right) \varphi_2 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} (\varphi_1 - \varphi_3) = 0, \\
 & -\left(\cos t \frac{\partial}{\partial t} - 2 \sin t\right) \varphi_3 + \\
 & + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right) \varphi_3 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} \varphi_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

2 Решение системы уравнений

Во всех трех функциях выделим множитель:

$$\varphi_j = \frac{1}{\cos^2 t} \frac{1}{\sinh r} F_j; \tag{2.1}$$

в результате система (1.3) формально упрощается

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right) F_2 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} (F_1 + F_3) = 0, \tag{2.2}$$

$$-\cos t \frac{\partial}{\partial t} F_1 - \frac{\partial}{\partial r} F_1 - \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} F_2 = 0, \tag{2.3}$$

$$-\cos t \frac{\partial}{\partial t} F_2 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} (F_1 - F_3) = 0, \tag{2.4}$$

$$-\cos t \frac{\partial}{\partial t} F_3 + \frac{\partial}{\partial r} F_3 + \frac{v}{\sqrt{2} \sinh r} F_2 = 0. \tag{2.5}$$

Складывая и вычитая уравнения (2.3) и (2.5) с учетом (2.4), получим (введем промежуточное обозначение $v/\sqrt{2} = b$) два уравнения

$$-\cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) - \frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3) = 0, \tag{2.6}$$

$$\cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 - F_3) + \frac{\partial}{\partial r} (F_1 + F_3) + \frac{2b}{\sinh r} F_2 = 0.$$

Покажем, что уравнение (2.2) является следствием уравнений (2.3)–(2.5). Для этого продифференцируем по времени уравнение (2.2):

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right) \frac{\partial}{\partial t} F_2 + \frac{b}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) = 0.$$

Учитывая (2.4), получим уравнение

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right) \frac{b}{\cos t \sinh r} (F_1 - F_3) + \\
 & + \frac{b}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) = 0
 \end{aligned}$$

эквивалентное следующему уравнению:

$$\frac{b}{\cos t \sinh r} \frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3) + \frac{b}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) = 0.$$

Если учесть здесь уравнение (2.6) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) = -\frac{1}{\cos t} \frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3),$$

то придем к тождеству $0 = 0$. Это означает, что уравнение (2.2) является следствием уравнений (2.3)–(2.5). В дальнейшем используем три (независимых) уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_2 = \frac{b}{\cos t \sinh r} (F_1 - F_3),$$

$$\cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) + \frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3) = 0,$$

$$\cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 - F_3) + \frac{\partial}{\partial r} (F_1 + F_3) + \frac{2b}{\sinh r} F_2 = 0. \tag{2.7}$$

Исключим функцию F_2 из третьего уравнения в (2.7); для этого продифференцируем его по времени и воспользуемся первым уравнением в (2.7):

$$\begin{aligned}
 & \cos t \frac{\partial}{\partial t} \cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 - F_3) + \cos t \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} (F_1 + F_3) + \\
 & + \frac{2b^2}{\sinh^2 r} (F_1 - F_3) = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, вместо (2.7) имеем эквивалентную ей систему:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} F_2 = \frac{b}{\cos t \sinh r} (F_1 - F_3), \\
 & \cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) = -\frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3), \\
 & \cos t \frac{\partial}{\partial t} \cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 - F_3) + \\
 & + \cos t \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} (F_1 + F_3) + \\
 & + \frac{2b^2}{\sinh^2 r} (F_1 - F_3) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Из третьего уравнения в (2.8) можно с помощью второго уравнения в (2.8) исключить комбинацию $(F_1 + F_3)$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} F_2 = \frac{b}{\cos t \sinh r} (F_1 - F_3), \\
 & \cos t \frac{\partial}{\partial t} (F_1 + F_3) = -\frac{\partial}{\partial r} (F_1 - F_3),
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\left(\cos t \frac{\partial}{\partial t} \cos t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2b^2}{\sinh^2 r}\right) (F_1 - F_3) = 0.$$

Чтобы упростить обозначения введем функции:

$$F = F_1 + F_3, \quad G = F_1 - F_3,$$

тогда система (2.9) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \cos t \frac{\partial}{\partial t} F_2 = \frac{b}{\sinh r} G, \\
 & \cos t \frac{\partial}{\partial t} F = -\frac{\partial}{\partial r} G,
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\left(-\cos t \frac{\partial}{\partial t} \cos t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2b^2}{\sinh^2 r}\right) G = 0.$$

В новой переменной

$$d\tau = \frac{dt}{\cos t}$$

система (2.10) представима в виде

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2b^2}{\sinh^2 r}\right) G = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \tau} F_2 = \frac{b}{\sinh r} G, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} F = -\frac{\partial}{\partial r} G.
 \end{aligned}$$

Решим уравнение для функции G методом разделения переменных:

$$G = T(\tau)R(r),$$

$$\frac{1}{T(\tau)} \frac{d^2}{d\tau^2} T(\tau) = \frac{1}{R(r)} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+1)}{\sinh^2 r} \right) R(r) = -\omega^2,$$

введена постоянная разделения ω^2 ; далее получаем

$$T(\tau) = e^{-i\omega\tau},$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \omega^2 - \frac{j(j+1)}{\sinh^2 r} \right) R(r) = 0.$$

Чтобы решить уравнение в радиальной переменной, введем новую переменную $z = 1 - e^{-2r}$:

$$4(1-z)^2 \frac{d^2 R}{dz^2} - 4(1-z) \frac{dR}{dz} + \omega^2 R - \frac{4(1-z)v^2}{z^2} R = 0.$$

Для функции R вводим подстановку $R = z^a(1-z)^b f(z)$:

$$z(1-z) \frac{d^2 f}{dz^2} + [2a - (2a + 2b + 1)z] \frac{df}{dz} + \left[-\frac{\omega^2}{4} - (a+b)^2 + (a(a-1) - v^2) \frac{1}{z} + \left(b^2 + \frac{\omega^2}{4} \right) \frac{1}{1-z} \right] f = 0.$$

Последнее слагаемое в уравнении упростится, если потребовать $a = j+1, -j, b = \pm i\omega/2$. В результате для функции f получаем уравнение

$$z(1-z) \frac{d^2 f}{dz^2} + [2a - (2a + 2b + 1)z] \frac{df}{dz} - \left[(a+b)^2 + \frac{\omega^2}{4} \right] f = 0,$$

которое является уравнением гипергеометрического типа

$$z(1-z)F'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]F' - \alpha\beta F = 0.$$

Параметры определяются соотношениями

$$\gamma = 2a, \quad \alpha = a + b - \frac{i\omega}{2}, \quad \beta = a + b + \frac{i\omega}{2}. \quad (2.11)$$

Выбор $a = j+1, -j, b = \pm i\omega/2$ обеспечивает, что по радиальной переменной построены регулярные в нуле вещественные решения, соответствующие стоячим волнам. Кроме того, очевидно, что установленный характер зависимости решений от времени означает независимость вектора Пойнтинга для построенных решений от времени, другими словами, факт изменения геометрии пространства во времени невозможно установить, измеряя плотность потока энергии электромагнитного поля.

Заключение

Исходная нестатическая метрика (0.1) после преобразования к использованной выше временной координате τ (см. (2.11)) примет вид

$$dS^2 = \cos^{-2} \tau \times$$

$$\times [d\tau^2 - (dr^2 + \sinh^2 r(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))].$$

Эта метрика отличается конформным множителем $\cos^{-2} \tau$ от метрики статической Вселенной Эйнштейна [16]. Построенные решения в осциллирующей модели де Ситтера связаны конформным преобразованием с решениями уравнений Максвелла в статической Вселенной Лобачевского (формула (2.1)).

Заметим также, что поскольку формализм Майораны – Оппенгеймера использует только составляющие электромагнитного тензора, то этот подход не позволяет следить за калибровочными степенями свободы электромагнитного поля. Такой анализ выполним на основе 10-мерного формализма.

Аналогичный анализ может быть выполнен в случае расширяющейся Вселенной де Ситтера [17], когда исходная метрика пространства-времени задается выражением

$$dS^2 = dt^2 - \cosh^2 [dr^2 + \sin^2 r(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)],$$

которое приводится преобразованием временной координаты к виду

$$dS^2 = \cos^{-2} \tau [d\tau^2 - (dr^2 + \sin^2 r(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))].$$

Эта метрика отличается от статической метрики Эйнштейна конформным множителем $\cos^{-2} \tau$.

Добавим, что запас систем координат в 3-мерных пространствах Лобачевского и Римана достаточно велик [18]; любая из них может использоваться при рассмотрении волновых уравнений (Максвелла, Дирака и других) в нестатических моделях де Ситтера. Можно утверждать, что в случае электромагнитного поля из факта конформной инвариантности уравнений Максвелла следует возможность построения решений в моделях де Ситтера, если удастся построить соответствующие решения в статических моделях Лобачевского – Римана.

Автор благодарна В.М. Редькову за советы и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weber, H.* Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen / H. Weber. – Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1901.
2. *Silberstein, L.* Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // Ann. Phys. (Leipzig). – 1907. – Vol. 22. – P. 579–586.
3. *Silberstein, L.* Nachtrag zur Abhandlung Über elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // Ann. der Phys. – 1907. – Vol. 24. – P. 783–784.
4. *Silberstein, L.* The Theory of Relativity / L. Silberstein. – London: Macmillan, 1914.
5. *Bateman, H.* The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-Motion on the Basis of

Maxwells Equations / H. Bateman. – Cambridge: University Press, 1915.

6. *Majorana, E.* Scientific Papers. (Unpublished). Deposited at the «Domus Galileana». Pisa, quaderno 2, p. 101/1; 3, p. 11, 160; 15, p. 16;17, p. 83, 159.

7. *Oppenheimer, J.* Note on Light Quanta and the Electromagnetic Field / J. Oppenheimer // Phys. Rev. – 1931. – Vol. 38. – P. 725–746.

8. *Bialynicki-Birula, I.* On the Wave Function of the Photon / I. Bialynicki-Birula // Acta Phys. Polon. – 1994. – Vol. 86. – P. 97–116.

9. *Bialynicki-Birula, I.* Photon Wave Function / I. Bialynicki-Birula // Progress in Optics. – 1996. – Vol. 36. – P. 248–294.

10. *Rodrigues, W.A.* The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations / W.A. Rodrigues, E.C. de Oliveira // Lecture Notes in Physics. – Springer. – 2007. – Vol. 722.

11. *Maxwell Equations in Complex form of Majorana – Oppenheimer, Solutions with Cylindric Symmetry in Riemann S_3 and Lobachevsky H_3 spaces* / A.A. Bogush, G.G. Krylov, E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov // Ricerche di matematica. – 2010. – Vol. 59, № 1. – P. 59–96.

12. *Red'kov, V.M.* Majorana – Oppenheimer Approach to Maxwell Electrodynamics. Part I. Minkowski Space / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, G.J. Spix // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2012. – Vol. 22. – P. 1129–1149.

13. *Red'kov, V.M.* Majorana – Oppenheimer Approach to Maxwell Electrodynamics. Part II. Curved

Riemannian Space / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, G.J. Spix // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2013. – Vol. 23. – P. 165–178.

14. *Redkov, V.M.* Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V.M. Redkov, E.M. Ovsyuk. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2012. – 434 p.

15. *Овсюк, Е.* Электродинамика Максвелла в пространстве с неевклидовой геометрией / Е. Овсюк, В. Редьков. – 2-е изд. – Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 242 с.

16. *Hawking, S.W.* The large scale structure of space-time / S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. – Cambridge: University Press, 1973.

17. *Electromagnetic Field on de Sitter Expanding Universe: Majorana – Oppenheimer Formalism, Exact Solutions in non-Static Coordinates* / O.V. Veiko, N.D. Vlasii, E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov, Yu.A. Sitenko // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2014. – Vol. 17, № 1. – P. 17–39.

18. *Олевский, М.Н.* Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 U + \lambda U = 0$ допускает полное разделение переменных / М.Н. Олевский // Мат. Сб. – 1950. – Т. 27. – С. 379–426.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф14АРМ-021) в рамках сотрудничества между Беларусью и Арменией.

Поступила в редакцию 18.03.15.